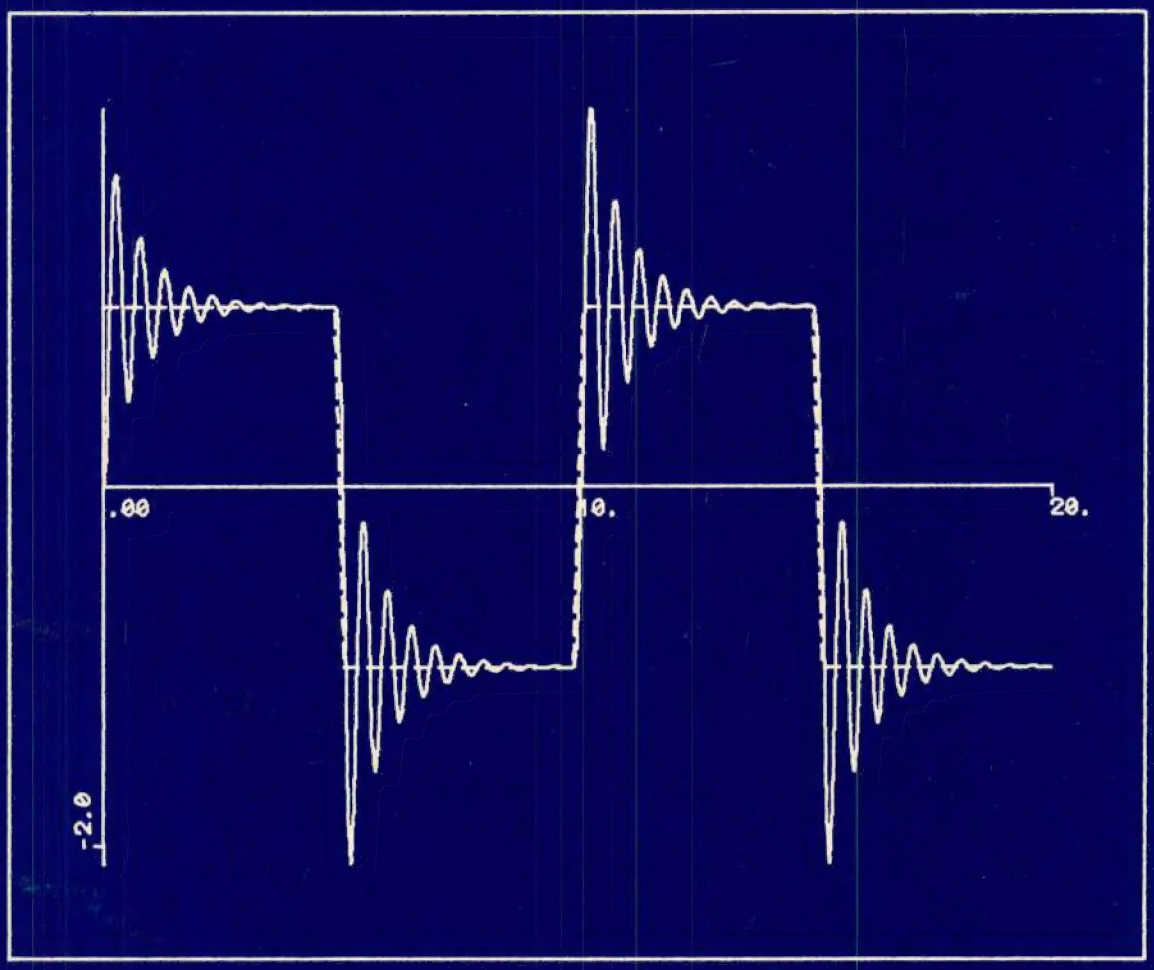
técnica



59

associação dos estudantes do instituto superior técnico

junho 1980

revista de engenharia

a moldura nacional, lda.

IMPORT. EXPORT. — VIDRO CRISTAL

VIDROS E CRISTAIS — MOLDURAS

VIDRO EM CHAPA — TRABALHOS EM VIDRO

VIDRO SEGURANÇA — ESPELHOS

LARGO DO CONDE BARÃO, N.º 44

TELEF. 66 43 12 1200 LISBOA

OU

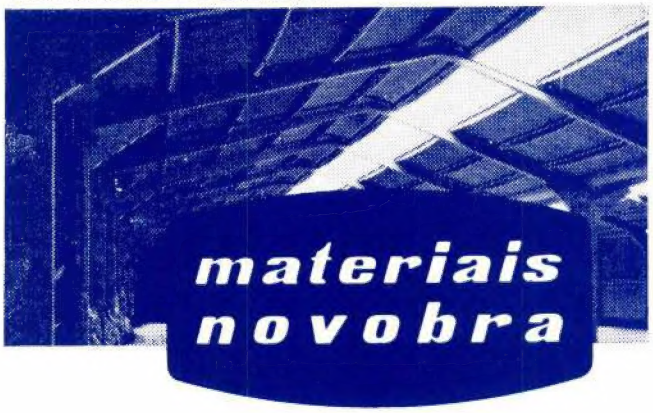
CALÇADA MARQUÊS DE ABRANTES, 10, 1.º-Esq.º

1200 LISBOA

TELEX 18489 UGLL P.

PÓRTICOS "CRENDON"

De pré-fabricacão total, montagem rapidíssima feita pelas n/ equipas especializadas e de aproveitamento total de todo o espaço em altura visto não existirem linhas de asnas.



A mais vasta gama em pré-fabricados de betão.

Pavimentos, coberturas, asnas, perfis especiais, «post-esforço Losinger», pontões, vigas de grande vão, pórticos «Crendon», pavimento «Trief», protecção de segurança «Trief», mosaicos, tubos, blocos «Leca», espaçadores de betão, estacas para vinhas e pomares e pré-fabricação total ou parcial.

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda e Moita.

Sede: Av. Est. Unidos da América, 100-5.º Dt.º — Lisboa-5
Telefones — Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 • Telex: 18373 NOVOBA P
Serviços Técnicos: 89 41 16/7/8 - 89 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

Iluminação pública e industrial.

SCHRÉDER, S.A.R.L.

Carnaxide-Tel.2180037

técnica

NÚMERO 459 JUNHO 1980 ANO LV VOLUME XLI PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
José Luís S. V. Azevedo

COLABORADORES
João José Águas
Sérgio Duarte Santos (F. C. Tecnologia — Coimbra)

FUNCIONÁRIOS
Jorge Graça
Fernanda Sanches

DIRECÇÃO, REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO
Av. Rovisco Pais, I.S.T.—1000 Lisboa
Telefone 88 93 23

PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.

ASSINATURAS: 10 n.os

Continente e Ilhas	450$00
Países de língua Portuguesa e Espanha	550$00
Estrangeiro	700$00 (US$15)
Número avulso ...	80$00

Encontram-se à venda na Secção Técnica, A. E. I. S. T., praticamente todos os números publicados até à data. Os preços são:

1 a 430 (inclusive) — 10$00 ex.
431 a 437 (») — 35$00 ex.
438 a 450 (») — 60$00 ex.
451 e seguintes — 80$00 ex.

* Excepto números duplos ou especiais.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
OF. GRÁFICAS DE RADIO RENASCENÇA
Rua Duques Bragança, 6 — 1200 LISBOA

SUMÁRIO

355 — Projecto apoiado em computador de sistemas de controlo — FRANCISCO CARVALHAL, ISABEL LOURTIE e PEDRO LOURTIE.

Computer-aided control system design.

369 — Tecnologia da metanogénese (revisão descritiva) — MARIA CELESTE ANTUNES e SILVESTRE DIAS ANTUNES.

Anaerobic digestion technology (review).

383 — Anaerobic digestion control using the phase-plane analysis (with application to methanogenesis) — SILVESTRE DIAS ANTUNES e MICHEL J. INSTALLE.

Utilização do plano de fases no controlo da digestão anaeróbia (aplicação à metanogénese).

393 — Corporation financing under falling share prices — F. CALDEIRA SARAIVA.

Financiamento por acções de preço flutuante.

403 — Simulador industrial de controlo de nível — J. R. CALDAS PINTO.

Industrial simulador for level control.

NOTAS CIENTÍFICAS

409 — Media where the coincidence of the directions of phase and group velocity remain under a Lorentz Transformation — M. ABREU FARO e MARIA JOÃO MARQUES MARTINS.

Meios em que as direcções das velocidades de fase e de grupo coincidem e se mantêm coincidentes sob uma transformação de Lorentz.

411 — Determination rapide du courant absorbé par un moteur asynchrone alimenté par onduleur de tension — F. LABRIQUE e J. M. THIRY.

Determinação rápida da corrente absorvida por um motor assíncrono alimentado por um ondulador de tensão.

391 — NOTICIÁRIO.

CAPA — Ver fig. 4.10 do artigo «Projecto apoiado em computador de sistemas de controlo» de Francisco Carvalhal, Isabel Lourtie e Pedro Lourtie.

CONSELHO CIENTÍFICO

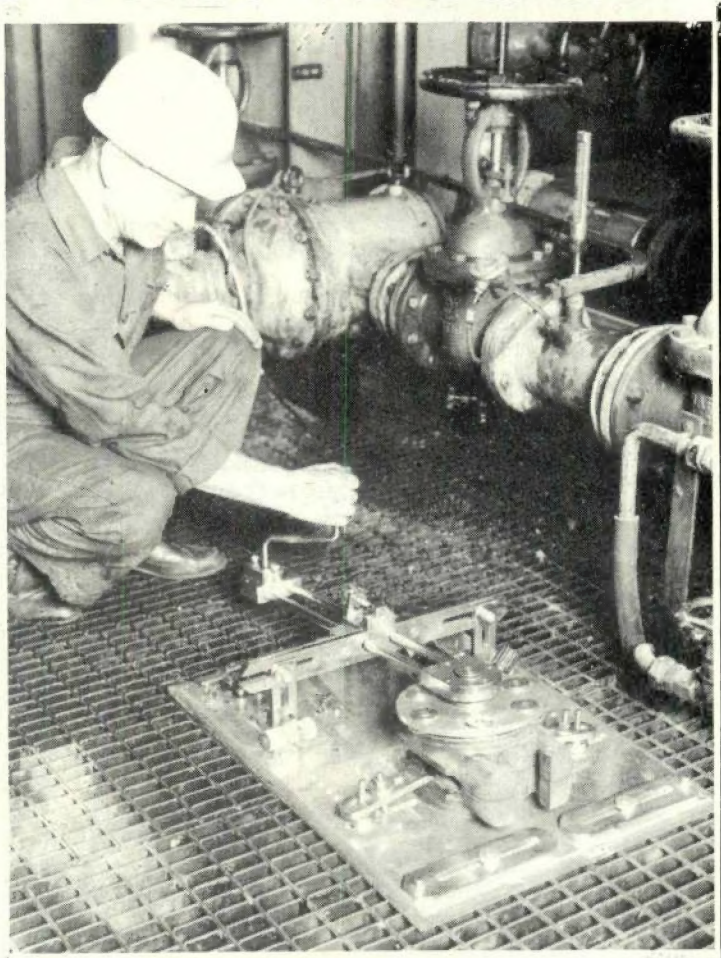
Alves, Luís de Almeida
Barros, Luís A. Aires
Calado, Jorge C. G.
Conte, J. C.
Costa, Fernando Vasco
Dias, A. Romão
Domingos, J. J. Delgado
Faro, Manuel José de Abreu
Ferreira, J. Campos
Figanier, J. P.
Garrido, M. S.
Horta, Ricardo Bayão
Loureiro, A. Pádua
Manzanares, Alberto Abecasis
Moura, Domingos
Moura, J. M. Fonseca de
Moutinho, A. M. C.
Oliveira, E. R. de Arantes e
Portela, A. Gouvêa
Quintela, António de Carvalho
Rogado, José Quintino
Santos, A. F. Ferreira dos
Serafim, J. Laginha
Simões, F. Rebelo
Silva, J. Borges da
Tavares, L. Valadares
Trindade, Rocha

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A Moldura Nacional, Lda.	2.ª da capa
Construções Schréder	2.ª da capa
Construções Técnicas	VI
FAG Portuguesa, Lda.	III e IV
FÉRIA-SERIC, Lda.	II
Hidrotécnica Portuguesa, Lda.	II
Metropolitano de Lisboa	V
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Soc. Portuguesa Cavan	II
Sopecate	II
SORUBAL, S. A. R. L.	4.ª da capa
S. K. F., Lda.	I

UNISLIP®

RECTIFICADORAS PARA VÁLVULAS



UMA REVOLUÇÃO NA MANUTENÇÃO DE VÁLVULAS DE CUNHA, DE GLOBO E PARALELAS

AS ÚNICAS RECTIFICADORAS REALMENTE PORTÁTEIS QUE PERMITEM RECTIFICAR:

– A SEDE DA VÁLVULA SEM A RETIRAR DA INSTALAÇÃO;

– A CUNHA DA VÁLVULA JUNTO DO LOCAL DE INSTALAÇÃO DESTA;

– A ELEVADAS VELOCIDADES COM O AUXÍLIO DE MOTORES DE AR COMPRIMIDO.

SE ESTÁ INTERESSADO PEÇA UMA DEMONSTRAÇÃO À:

SOCIEDADE SKF LIMITADA

1200 LISBOA – PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 – TELEGR.: ESKAEF – TELEX: 12156

4100 PORTO – RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 – TELEGR.: ESKAEF

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

EXPORTAMOS SERVIÇOS E TÉCNICA PARA

- ANGOLA
- ARGÉLIA
- BRASIL
- LÍBIA
- MARROCOS
- MOÇAMBIQUE

HP

HIDROTÉCNICA PORTUGUESA

EDIFÍCIO HP · RUA DA GUINÉ · SACAVÉM / APARTADO 5058 · 1702 LISBOA CODEX

Ventilação de Edifícios

Ventilação Térmica

FÉRIA

(tipo shunt)

Com aprovação do
Laboratório Nacional de Engenharia Civil
Câmara Municipal de Lisboa
Batalhão de Sapadores Bombeiros
Direcção-Geral de Saúde

Exija o documento de viabilidade de utilização do L.N.E.C.

Consulte o Art.º 87 § 2 e Art.º 110 §§ 2 e 3 do R.G.E.U.

ESPECIALISTA DESDE 1947

sopecate

ESTUDOS GEOTÉCNICOS

FUNDAÇÕES ESPECIAIS

RUA DO ARSENAL, 146-2º
TELFS. 320208 · 360437 · 364010
LISBOA

O-Rings

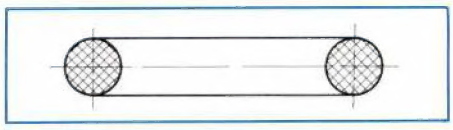
Praticamente todas as máquinas e equipamentos estão equipados com o-rings. Na construção mecânica, na industria electrotécnica, em mecânica de precisão, na indústria sanitária, na construção de acessórios e em muitos outros campos, os o-rings são elementos de vedação indispensáveis.

Os o-rings SIMRIT têm grandes vantagens.

- A qualidade. Ela resulta da eficiência dos nossos laboratórios, do interesse que dedicamos à investigação e do acabamento do material. No nosso trabalho são utilizados os mais perfeitos e recentes meios da mais moderna e avançada técnica.
- Grande variedade de medidas. Produzimos o-rings em mais de 2.500 dimensões e temos, permanentemente, em stock uma variedade de mais de novecentas.
- Grande variedade de materiais. Temos sempre para entrega o-rings de SIMRIT à base de NBR, com durezas 70 e 90 Shore A, e de Viton. E, para casos especiais, utilizamos outros materiais. Quer os o-rings tenham de suportar temperaturas extremas ou pressões elevadas, quer se destinem a vedar os produtos mais agressivos, a verdade é que estamos sempre aktos a escolher o material exacto para o seu caso.
- O nosso catálogo nº 300. Ele contém tabelas com as medidas dos o-rings e dos anéis de apoio mais usuais, informações sobre os materiais e instruções de montagem, tanto para aplicações estáticas como para aplicações dinâmicas. Este catálogo é um precioso auxiliar para qualquer projectista.

Definição

Os o-rings são vedantes em forma de anel cuja secção é circular.



Prinzípio de funcionamento

O efeito de vedação do o-ring resulta da sua compressão no sentido radial ou axial.

Utilização

Os o-rings tanto se utilizam para manter a estanqueidade entre peças de máquinas que não se movem entre si – vedacão estática – como para efectuar a vedação entre orgãos com movimento relativo – vedação dinâmica.

Materiais

Os materiais SIMRIT utilizados na fabricação de o-rings, obedecem às seguintes exigências:
– Estabilidade quimica no meio a vedar.
– Estabilidade térmica de acordo com a aplicação em vista.
– Resistência ao desgaste.
– Dureza ajustada à pressão de serviço.

Materiais standard

		Meios à base de óleos minerais								líquidos não inflamáveis (segundo VDMA)				Outros meios		
										24 317 HSB	24 317 HSC	HSD	24 320 HSA			
Materiais SIMRIT	Temp. min. admitidas °C	Óleos para motores	Óleos hypóides	Óleos ATF	Gasolina Normal	Gasolina Super	Óleos hidraúlicos DIN 51 524	Nafta EL e L	Massas lubrificantes	Emulsão água-óleo	Solução aquosa	Liquidos anidros	Emulsão água-óleo	Água	Ar	Óleos de Lavagem
		Temperaturas de serviço admissíveis em °C														
70 NBR/769	–40	100	90	100	●	–	100	●	90	70	70	–	70	80	90	–
80 NBR/156	–30	100	90	100	●	–	100	●	90	70	70	–	70	90	90	–
83 FKM/575	–15	170	150	170	+	+	150	150	+	70	70	150	70	100	200	–

Para mais informações ver o nosso catálogo nº 300

+ estável mas, em regra, não utilizado
– não estável
● estabilidade condicionada

FAG PORTUGUESA, L.DA
Rua Delfim Ferreira · PORTO
Telefone: 6 41 41 · Telex: 22 300 FAGP

Projecto apoiado em computador de sistemas de controlo
Bloco operacional

FRANCISCO CARVALHAL (1)
ISABEL LOURTIE (2)
PEDRO LOURTIE (3)

RESUMO

O artigo descreve com algum detalhe o bloco operacional de um conjunto articulado de programas para o projecto apoiado em computador de sistemas de controlo. Neste bloco encontram-se implementados os métodos do lugar geométrico das raízes, Nyquist, Bode e da simulação digital da resposta no tempo. Apresenta-se os algoritmos utilizados bem como alguns exemplos de aplicação.

ABSTRACT

The paper describes with some detail the operational block of a control systems computer-aided design package. The root locus, Nyquist, Bode and time response methods are implemented in this block. The algorithms are presented as well as some application examples.

0 — INTRODUÇÃO

Antes de passarmos à análise do bloco operacional de um conjunto articulado de programas para o projecto apoiado em computador de sistemas de controlo, convém referir que este artigo se insere e é continuação de um outro artigo já publicado [1] onde se descreve o bloco de manipulação e tratamento de dados, sendo ainda de frisar que o presente trabalho resulta de uma colaboração entre o Laboratório Nacional de Engenharia Civil (L. N. E. C.) e o Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa (C. A. U. T. L.).

No bloco operacional do referido conjunto articulado de programas, <CONPAC>, foram implementadas as técnicas ou métodos mais vulgarmente utilizados na análise e síntese de sistemas de controlo univariáveis (uma entrada/uma saída) e que são os seguintes:

— Método do lugar geométrico das raízes («root locus»),
— Método de Nyquist,
— Método de Bode,
— Simulação digital da resposta no tempo,

sendo de referir que em todos eles se admitem sistemas que apresentem atraso no tempo.

Como é sabido, os resultados obtidos com estas técnicas exprimem-se, fundamentalmente, através de diagramas; sendo assim, a parte respeitante à apresentação gráfica dos resultados assume especial relevância. Este facto foi, com efeito, tomado em devida consideração na elaboração e estruturação dos algoritmos adoptados. Na realidade, como adiante se verá, os pontos dos diagramas obtidos para qualquer uma das técnicas referidas estão graficamente equidistantes entre si, o que melhora consideravelmente a observação daqueles diagramas.

Na exposição dos algoritmos utilizados, tentaremos, essencialmente, descrever a «filosofia» que preside ao seu funcionamento, evitando-se sobrecarregá-la com excessivos detalhes da implementação, detalhes estes que poderiam, eventualmente, desmotivar o leitor. Reportar-nos-emos a sistemas cujo diagrama de blocos simplificado se representa na Fig. 1.1.

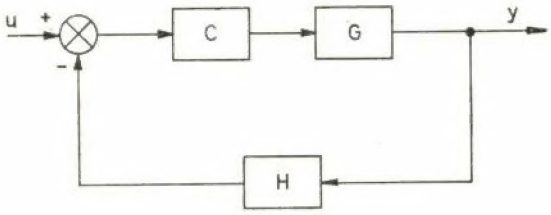


FIG. 1.1
G — sistema controlado
C — controlador
H — retroacção

(1) Especialista do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
(2) Assistente do Instituto Superior Técnico, Investigador do Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa (I. N. I. C.).
(3) Professor do Instituto Superior Técnico, Investigador do Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa (I. N. I. C.).

Manuscrito recebido para publicação em 3/7/80.

0.1 — Entrada no bloco operacional

A entrada no bloco operacional para a análise de um sistema pressupõe que já houve, anteriormente, uma ou mais passagens pelo bloco de manipulação de dados de modo a ter-se possibilitado a criação dos ficheiros necessários, contendo a informação requerida, adequadamente organizada **[1]**.

Nestas circunstâncias, qualquer que seja a técnica seleccionada, é obrigatório seguir-se um procedimento preparatório, o qual envolve algumas perguntas dirigidas ao utilizador. Assim, é indagado, em primeiro lugar, se se pretende a análise do sistema em anel fechado ou em anel aberto. No primeiro caso, é lido o ficheiro que contém a função de transferência do sistema em anel fechado entrando-se, em seguida, no método escolhido. No segundo caso, sistema em anel aberto, é lido o ficheiro que contém a informação relativa a G(s) e, de seguida, é averiguado se já foram criados os ficheiros correspondentes aos sub-sistemas controlador C(s) e de retroacção H(s) ou, alternativamente, se se pretende considerar $C(s) = 1$ e/ou $H(s) = 1$; finalmente, o produto $G(s).C(s).H(s)$ é calculado antes de se entrar na técnica seleccionada. Em qualquer destes dois casos, anel fechado ou anel aberto, o procedimento referido provoca um retorno automático ao bloco supervisor principal, precedido de uma mensagem apropriada para o utilizador, se não tiverem sido já criados todos os ficheiros necessários.

1 — LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES («ROOT LOCUS»)

O algoritmo elaborado para o traçado do diagrama do lugar geométrico das razes (LGR) recorre, fundamentalmente, a uma busca sistemática, sequencial e angular, dos pontos que constituem os diferentes ramos do LGR de um sistema, para ganhos positivos, com excepção dos ramos (ou de troços a eles pertencentes) que coincidam com o eixo real (abcissas), os quais são traçados utilizando a propriedade referida em 1.2.1 **[2, 3]**.

À entrada do programa relativo a esta técnica, é conhecida a função de transferência do sistema a analisar quer na sua forma racional quer na sua forma factorizada, ou seja, são conhecidos os valores não só dos coeficientes dos polinómios do numerador e do denominador como também dos polos e dos zeros, valores estes armazenados em variáveis indexadas ou «arrays» adequados; é conhecido ainda o valor de α, respeitante ao atraso no tempo, o qual pode ser nulo (sistema sem atraso). Antes do traçado do LGR propriamente dito, são executadas diversas operações preliminares; durante esta fase inicial o programa requer ainda alguns dados fornecidos pelo utilizador, como adiante se verá. Na fase final, o programa permite ainda, caso se pretenda, não só o traçado de linhas (rectas) de amortecimento relativo constante como também a localização dos polos do sistema (com o anel de retroacção fechado) para diversos valores do ganho em anel aberto.

1.1 — Fase preliminar ou inicial

Na fase inicial já atrás referida, o programa executa as acções e operações que a seguir se indicam:

1) Dá o valor zero a determinadas variáveis inteiras com funções do tipo «flag».
2) Pergunta ao utilizador quais as dimensões exteriores (em cm) do desenho correspondente ao LGR.
3) Abre o ficheiro (de extensão PLT) que conterá toda a informação que permitirá, posteriormente, representar-se o diagrama quer no «plotter» quer num terminal gráfico. **Nota:** este procedimento adapta-se à configuração actual do computador digital DEC-10 do LNEC.
4) Coloca em três «arrays» diferentes os polos complexos, os zeros complexos e os polos e zeros reais. Em cada um deles, os polos e os zeros ficam ordenados por ordem decrescente dos valores das respectivas partes reais. Atendendo-se à simetria existente relativamente ao eixo real, não se incluem neste arranjo os polos e zeros conjugados de parte imaginária negativa. Com efeito, devido à referida simetria, todas as buscas são realizadas apenas no semi-plano correspondente à parte imaginária positiva.
5) Calcula os valores extremos de ambos os eixos de modo a definir uma área mínima que inclua todos os polos e zeros. Indica estes valores ao utilizador permitindo que este os modifique ou os mantenha.
6) Calcula o valor para o incremento, ou passo, a utilizar na busca dos pontos dos ramos do LGR. O critério utilizado baseia-se na dimensão da área definida e nas distâncias dos polos complexos aos zeros complexos e fronteira daquela área. Indica o valor calculado ao utilizador, permitindo também que este o modifique caso o pretenda.
7) Traça e gradua os eixos. Representa todos os polos por uma cruz (x) e todos os zeros por um losango (◇).
8) Determina quais os pontos singulares.

1.1.1 — Cálculo dos pontos singulares

A função de transferência racional de um sistema em anel aberto pode ser representada como segue

$$F(s) = \frac{K.N(s)}{D(s)} \cdot e^{-\alpha s} \qquad (1.1)$$

em que

$$F(s) = C(s) \cdot G(s) \cdot H(s)$$

e, por conseguinte,

$$N(s) = N_C(s) \cdot N_G(s) \cdot N_H(s)$$
$$D(s) = D_C(s) \cdot D_G(s) \cdot D_H(s)$$

e em que, por outro lado, α representa o valor do atraso no tempo e K o valor do ganho; $s = \sigma + j\omega$ é a variável complexa.

Um ponto s^* qualquer que satisfaça a relação

$$\left.\frac{dK}{ds}\right|_{s=s^*} = 0 \tag{1.2}$$

é designado por ponto singular **[4]**. Atendendo à expressão (1.1), da expressão (1.2) resulta que

$$N(s) \,.\, D'(s) - N'(s) \,.\, D(s) + \alpha N(s) \,.\, D(s) = 0 \tag{1.3}$$

dado que $e^{\alpha s} \neq 0$ e que $N(s) \neq 0$ para valores finitos do ganho K. Se não se verificar atraso no tempo, $\alpha = 0$, a expressão anterior devem

$$N(s) \,.\, D'(s) - N'(s) \,.\, D(s) = 0 \tag{1.4}$$

Designando por m a ordem do polinómio N(s) e por n a ordem de D(s) verifica-se que existirão $(n+m)$ pontos singulares para $\alpha \neq 0$ e $(n+m-1)$ pontos singulares se $\alpha = 0$.

No programa a determinação dos pontos singulares consiste, como é natural, no cálculo das raízes dos polinómios representados em (1.3) ou (1.4), o que se faz recorrendo, sucessivamente às subrotinas PDER (derivação de polinómios), PMPY (multiplicação de polinómios) e PRBM (determinação de raízes reais e complexas de polinómios, com utilização da iteração de Bairstow). Estas subrotinas pertencem à Scientific Subroutine Package (SSP) da IBM, residente no computador DEC-10 do LNEC.

Para cada um dos pontos singulares assim obtidos é calculado o valor correspondente do ganho K, sendo eliminados aqueles para os quais se constata que $K \leqslant 0$.

A importância da determinação dos pontos singulares consiste não só no facto de neles se incluirem os pontos de saída e de entrada de ramos no eixo real (pontos «break-away» e «break-in»), pontos singulares reais, mas também por indicarem pontos onde dois ou mais ramos distintos do LGR se intersectam ou tocam.

1.1.2 — Valor do Ganho

Para um sistema com retroacção negativa, a função de transferência em anel fechado é dada por

$$T(s) = \frac{K \,.\, N_C(s) N_G(s) D_H(s)\, e^{-\alpha s}}{D(s) + K \,.\, N(s)\, e^{-\alpha s}} \tag{1.5}$$

atendendo a (1.1) e expressões subsequentes. Assim, para diversos valores do ganho K, os polos do sistema em anel fechado são dados pelas raízes ou zeros da função complexa

$$g(s) = D(s) + K \,.\, N(s)\, e^{-\alpha s} = 0 \tag{1.6}$$

ou, caso não exista atraso no tempo,

$$g(s) = D(s) + K \,.\, N(s) = 0 \tag{1.7}$$

Tem-se, portanto, que o ganho K em cada ponto **s** do LGR obedece à condição expressa por

$$K = -\frac{D(s)}{N(s)\, e^{-\alpha s}} \tag{1.8}$$

Tomando a parte real e a parte maginária da expressão (1.6) verifica-se que o valor do ganho, para um ponto **s** qualquer pertencente ao LGR, é dado **[4]** por

$$K = -\frac{\mathrm{Re}\{D(s)\}}{\mathrm{Re}\{N(s)\, e^{-\alpha s}\}} \tag{1.9}$$

ou,

$$K = -\frac{\mathrm{Im}\{D(s)\}}{\mathrm{Im}\{N(s)\, e^{-\alpha s}\}} \tag{1.10}$$

1.2 — Cálculo e traçado dos ramos

Concluída a fase preliminar atrás descrita, inicia-se a execução do traçado propriamente dito do LGR, ou seja, o cálculo e traçado dos diferentes ramos; como é sabido, o número de ramos distintos é igual ao número de polos da função de transferência em anel aberto, quando não existe atraso no tempo. O procedimento sequencial utilizado é o que a seguir se indica:

1) Traça os ramos existentes no eixo real, os quais designaremos por ramos reais.
2) Traça os ramos que eventualmente intersectem a fronteira da área de interesse, previamente definida pelo utilizador. Como foi referido na parte inicial de 1.1, esta área (e, portanto, a fronteira que a limita) refere-se apenas ao semi-plano correspondente à parte imaginária positiva.
3) Traça os ramos que partem dos polos complexos. Eventualmente, se um ramo traçado a partir da fronteira atingiu um destes polos, não é então aqui considerado uma vez que, como é evidente, o ramo respectivo já se encontra traçado.
4) Se, por algum motivo, algum ou alguns dos zeros complexos, caso existam, não forem atingidos por nenhum ramo, inicia-se então o seu traçado a partir destes zeros complexos.

Com excepção dos ramos reais, os pontos dos restantes ramos, que designaremos por ramos complexos, são determinados através de um mesmo procedimento, o qual se baseia, essencialmente, nos valores assumidos pelo que denominamos de função de desvio angular construída com base na condição de ângulo ou condição angular.

1.2.1 — Ramos reais

O traçado dos ramos reais é feito com base na propriedade do LGR que refere que para sistemas com retroacção negativa e valores positivos do ganho em anel aberto estes ramos existem nos segmentos do eixo real para os quais a soma de polos e zeros à sua direita (maiores valores de **x**) é um número ímpar **[2]**.

1.2.2 — Condição angular. Função de desvio angular

Se um ponto qualquer $s = x + jy$ do plano pertence a um ramo do LGR deve então satisfazer a condição angular, a qual se pode representar pela expressão seguinte

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i - \sum_{i=1}^{n} \Theta_i - xy = (1 + 2r) \cdot 180^o$$
$$[r = \ldots, -1, 0, 1, \ldots] \qquad (1.11)$$

em que γ_i e Θ_i são ângulos ou contribuições angulares referentes aos zeros e polos, respectivamente. O significado destas contribuições angulares pode ser facilmente apreendido pela observação da Fig. 1.2, na qual se apresenta um exemplo do cálculo de Ω para um ponto $s = x + jy$.

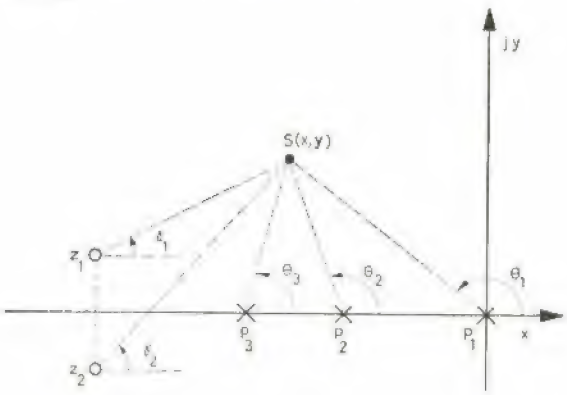


FIG. 1.2

A busca dos pontos dos ramos complexos baseia-se na referida condição angular ou, mais concretamente, numa função de Ω procurando detectar, como adiante se verá, dois valores daquela função com sinais contrários e de tal modo que para os pontos que satisfaçam aquela condição a função assuma o valor zero.

Observando-se a expressão (1.11) verifica-se que a condição angular é satisfeita quando Ω toma o conjunto de valores (..., -540°, -180°, 180°, 540° ...), apresentando, por conseguinte, uma periodicidade igual a 360°.

Tendo em atenção o que se expôs nos parágrafos anteriores, optou-se pela seguinte função.

$$f(\Omega) = \cos(\Omega/2) \qquad (1.12)$$

que designamos, como já foi atrás referido, por função de desvio angular.

Dado que esta função tem como variável independente um somatório dos ângulos γ_i e Θ_i, os quais, por sua vez, são calculados a partir da função circular inversa arc tan, tornam-se necessárias algumas precauções, as quais se encontram implementadas no programa, precauções estas que se podem considerar como normais quando se lida com ângulos e funções circulares inversas.

1.2.3 — Pesquisa dos ramos complexos

Cada ponto de um ramo complexo é determinado através de uma pesquisa circular, com base nos valores assumidos pela função desvio e tendo em conta os dois pontos anteriormente calculados, O e P, têm coordenadas (x_{i-1}, y_{i-1}) e (x_i, y_i), respectivamente. A pesquisa do novo ponto faz-se a partir do ponto P, o último a ser determinado. Em primeiro lugar, calcula-se o ângulo, ϕ, que o segmento OP faz com o eixo real, com base no conhecimento das coordenadas atrás referidas; para a determinação do primeiro ponto, feita quando se inicia o algoritmo de pesquisa do ramo, é dado um valor de ϕ que depende do ponto de partida. A pesquisa do novo

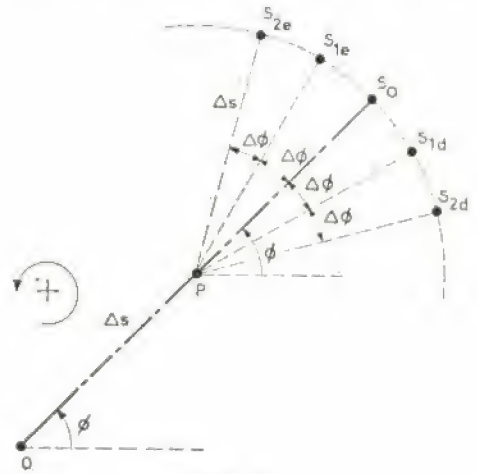


FIG. 1.3

ponto do ramo efectua-se sobre os pontos de uma circunferência cujo raio é Δs, valor do incremento ou passo já referido em 1.1, e com centro em P. Um primeiro ponto de pesquisa, S_o, é então determinado no prolongamento do segmento OP, com coordenadas dadas, portanto, pelas expressões

$$x_{so} = x_i + \Delta s \cdot \cos(\phi)$$
$$y_{so} = y_i + \Delta s \cdot \operatorname{sen}(\phi) \qquad (1.13)$$

Para este ponto S_o são então calculados, através das expressões (1.11) e (1.12), os valores de Ω e de $f(\Omega)$. Caso este último valor seja nulo ou, mais correctamente, caso

$$|f(\Omega)| \leqslant \Delta f \qquad (1.14)$$

o ponto S_o é considerado como o novo ponto; Δf é um valor pequeno e constante, internamento fixado. Caso não se verifique (1.14) inicia-se então uma busca sequencial para pontos alternadamente à direita e à esquerda de S_o (pontos S_{kd} e S_{ke}). Mais concretamente, a sequên-

cia de pontos é constituída por S_{1d}, S_{1e}, S_{2d}, S_{2e}, ..., etc. As coordenadas de cada um destes pontos de pesquisa são calculadas por expressões semelhantes às (1.13) em que os ângulos são dados por

$$\emptyset_{kd} = \emptyset - k \,.\, \Delta\emptyset$$
$$\emptyset_{ke} = \emptyset + k \,.\, \Delta\emptyset$$

sendo $\Delta\emptyset$ um incremento angular constante e internamente estabelecido. Para cada um destes pontos determina-se o valor da função desvio, isto é, $f_{kd}(\Omega)$ ou $f_{ke}(\Omega)$. Logo que se detecta uma inversão de sinal da função desvio entre dois pontos consecutivos, entra-se numa rotina onde se determina o ponto pertencente ao ramo (para o qual a expressão (1.14) é satisfeita) por intermédio de um algoritmo baseado no método da falsa posição **[5]**, o qual apresenta a característica de ser sempre convergente.

Após ter sido determinado o novo ponto, entra-se numa rotina de verificação que averigua se aquele se encontra dentro de uma vizinhança de raio Δs do eixo real, da fronteira, de um ponto singular complexo, de um zero complexo ou, finalmente, de um polo complexo. Caso se verifique a ocorrência de qualquer um destes casos, a pesquisa de novos pontos do ramo cessa; caso contrário, continua. Relativamente aos polos e zeros complexos, aquela ocorrência implica o levantamento de uma «flag» correspondente, indicando que aquele polo (ou zero) foi já atingido por um ramo. Deve referir-se que esta rotina de verificação não é aplicada aos dois primeiros pontos determinados, atendendo ao critério que define o valor do incremento Δs.

Convém ainda ser referido que o algoritmo adoptado permite que os pontos dos ramos do LGR sejam equidistantes entre si. Por outro lado, a experiência tem demonstrado que é de execução rápida.

1.2.4 — Pesquisa da fronteira

O algoritmo da pesquisa da fronteira da área de interesse é muito semelhante ao algoritmo referente à busca dos ramos complexos. Como já atrás se referiu, esta pesquisa destina-se a investigar a existência de ramos que, eventualmente, intersectem a fronteira; determinado um ponto de intersecção, recorre-se então ao algoritmo de traçado de ramos complexos. O objectivo primário desta pesquisa consiste em tornar possível o traçado de ramos que, em determinadas circunstâncias, não o seriam; incluem-se nestas circunstâncias, factores tais como dimensões da área de interesse e/ou existência de atraso no tempo, como adiante se verá num dos exemplos de aplicação apresentados.

Para determinar as coordenadas dos eventuais pontos de intersecção, a fronteira é dividida em três zonas: duas em que y varia desde Δs até y_{max} e x toma, respectivamente, os valores constantes x_{min} e x_{max}, e uma em que x varia desde x_{min} até x_{max} com y constante e igual a y_{max}. Conforme os valores constantes das coordenadas dos pontos de pesquisa sejam x_{min}, y_{max} ou x_{max}, os ângulos iniciais para a pesquisa dos ramos complexos a partir dos pontos de intersecção são iguais a 0º, 270º e 180º, respectivamente.

Em cada uma das três zonas da fronteira são considerados diversos pontos equidistantes entre si de Δs. Sequencialmente, verifica-se para cada um deles se já foi atingido previamente por um ramo (para tal existe um «array» adequado que regista as coordenadas de pontos da fronteira já atingidos por ramos). Caso tal se verifique, o ponto não é considerado; caso contrário, calcula-se o valor da função de desvio angular correspondente a esse ponto. Quando se detecta uma inversão do sinal daquela função entre dois pontos consecutivos, aplica-se então o método da falsa posição que dará as coordenadas do ponto de intersecção, para o qual a condição (1.14) deverá ser satisfeita. A pesquisa da fronteira só termina quando todos os pontos sobre ela considerados tiverem sido investigados.

1.2.5 — Ramos a partir de polos e zeros complexos

Para cada polo e zero complexo verifica-se, pelo estado da «flag» respectiva já atrás referida, se um ramo ja os atingiu. Em caso afirmativo não são considerados. Caso contrário, determina-se o ângulo de partida (polo) ou ângulo de chegada (zero) **[2]**, cujo valor é fornecido à rotina de traçado de ramos complexos, a qual é então activada.

1.3 — Fase final

Concluído o traçado de todos os ramos do LGR, o utilizador pode ainda optar pelo traçado de linhas de amortecimento constante (para valores desse amortecimento não nulos e inferior a 1) e pela localização dos polos do sistema em anel fechado para diversos valores do ganho em anel aberto.

As linhas de amortecimento relativo constante são traçadas sabendo-se que se tratam de rectas, passando pela origem, e fazendo um ângulo com o semi-eixo negativo de **x** dado por arc cos ζ, em que ζ representa o valor do amortecimento relativo **[2]**.

A localização dos polos do sistema em anel fechado é realizada através da determinação dos zeros da função (1.6) ou, caso não exista atraso no tempo, de (1.7).

Para a determinação dos zeros de (1.6) utiliza-se a rotina ZANLYT que pertence ao «package» IMSL (International Mathematical & Statistical Libraries), existente no computador DEC-10 do LNEC. No caso de (1.7), é utilizada a rotina PRBM, já atrás referida. Os polos do sistema em anel fechado assim determinados, são representados no diagrama do LGR por um pequeno triângulo, caso estejam dentro da área de interesse seleccionada.

1.4 — Exemplos de aplicação

1.4.1 — *Exemplo I*

Na Fig. 1.4 está representado o lugar geométrico das raízes obtido para o sistema

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s+1} \; ; \; C(s) = 1 \; ; \; H(s) = 1$$

Note-se a existência de dois ramos que se iniciam e terminam na fronteira, cuja representação não seria conseguida se não existisse a pesquisa de fronteira.

1.4.2 — *Exemplo II*

Neste exemplo determinou-se o LGR do sistema

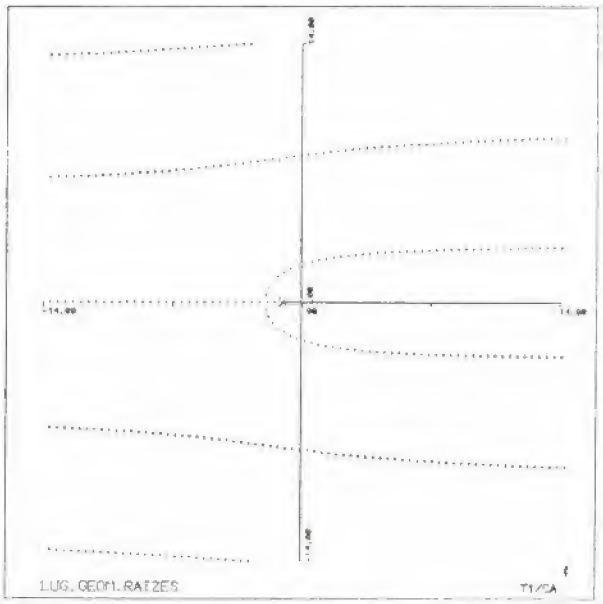


FIG. 1.4

$$G(s) = \frac{s+z}{s(s+1)\ (s+3)}\ ;\ C(s) = 1\ ;\ H(s) = 1$$

para $z = 1.5,\ 1.02,\ 1.01$.

Na Fig. 1.5 apresenta-se o diálogo realizado entre o utilizador (caracteres sublinhados) e o programa, no caso em que $z = 1.5$, representando-se na Fig. 1.6 o LGR correspondente.

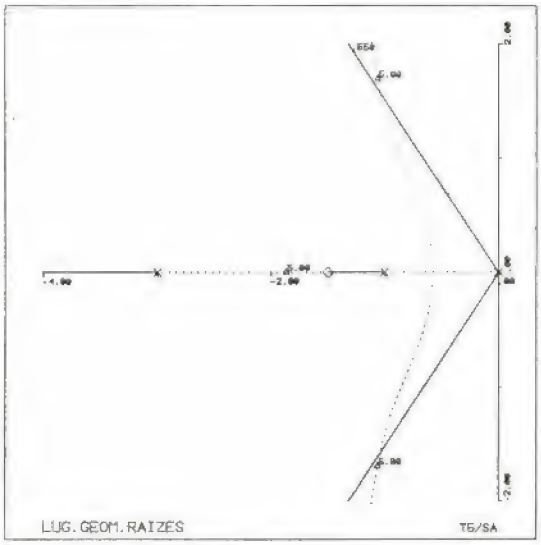


FIG. 1.5

```
SUPERVISOR UNIV

E GRUPO/LGR

MENU DO LUGAR GEOMETRICO DAS RAIZES

PRETENDE RESULTADOS PARA O SISTEMA
EM ANEL ABERTO? S

JA' DEFINIU G(S) RACIONAL? S

G(S) RACIONAL EM LOCALIZ NO DISCO

TIPO DE CARACTERIS: INT

JA' DEFINIU C(S) RACIONAL? N

PRETENDE C(S)=1? S

JA' DEFINIU H(S) RACIONAL? N

PRETENDE H(S)=1? S

REFERENCIA (ATE' 5 CARACTERES): T2/SA

TRACADO DO LUGAR GEOMETRICO
DAS RAIZES   ('ROOT LOCUS')

PONTOS SINGULARES (REAL IMAG.):
  -0.1834E+01     0.7081E+00
   0.5822E+00     0.0000E+00

DIMENSOES EXTERIORES DO DESENHO
LB=( X =30 ; B=  Y =30  (CM))
X,Y=14 14

INCREMENTO CALCULADO: 3.750E-02
QUER MODIFICAR (S OU N)? S
```

```
NOVO INCREMENTO (>0.)=.05

VALORES EXTREMOS SELECCIONADOS:
XMAX= 0.00000E+00
XMIN=-5.00000E+00
YMAX= 5.00000E-02
YMIN=-5.00000E-02

QUER MODIFICAR LIM. (S OU N)? S

NOVO XMAX 0

NOVO XMIN -4

NOVO YMAX (YMIN=-YMAX)=2

VALORES EXTREMOS SELECCIONADOS:
XMAX= 0.00000E+00
XMIN=-4.00000E+00
YMAX= 2.00000E+00
YMIN=-2.00000E+00

NR. PONTOS CALCULADOS:  34

TRACADO DE LINHA DE AMORT. RELATIVO (S OU N)? S

ZETA=.55

TRACADO DE LINHA DE AMORT. RELATIVO (S OU N)? N

LOCALIZACAO DE POLOS PARA GANHO >0 (S OU N)? S

GANHO=5

LOCALIZACAO DOS POLOS PARA GANHO= 5.00000E+00:
     REAL          IMAG
 1.06665E+00   1.69707E+00
-1.06665E+00  -1.69707E+00
 1.86571E+00   0.00000E+00

LOCALIZACAO DE POLOS PARA GANHO >0 (S OU N)? N

E AGORA? SUP
```

FIG. 1.6

Nas Fig. 1.7 e 1.8 mostra-se o LGR para $z=1.02$ e $z=1.01$, respectivamente.

Note-se as alterações no diagrama quando se modifica o afastamento entre o zero real e o polo real $p=-1$.

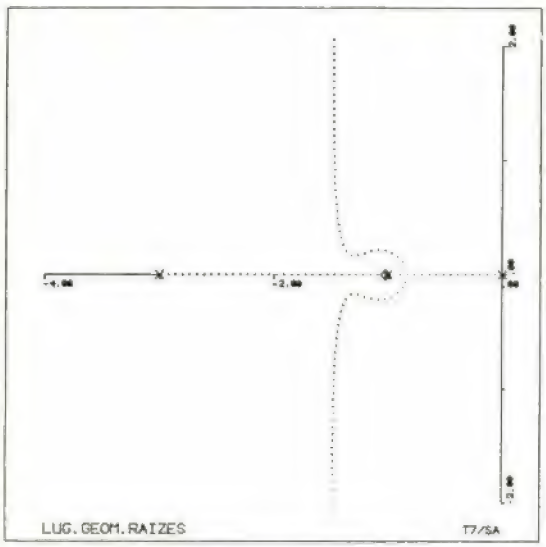


Fig. 1.7

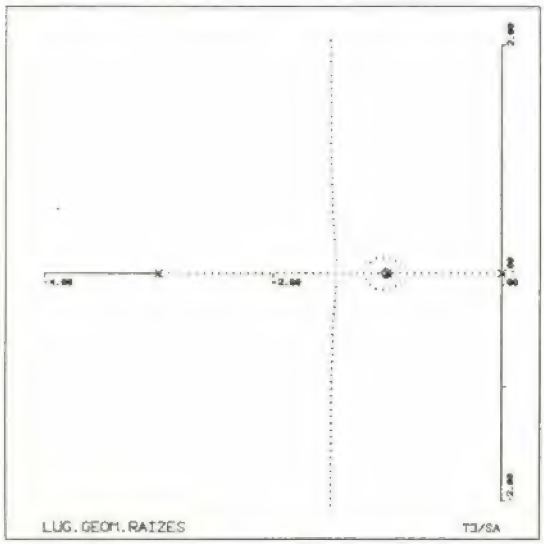


FIG. 1.8

2 — MÉTODO DE NYQUIST

Este bloco permite ao utilizador obter o diagrama de Nyquist **[2, 3]** de um sistema, conhecida a sua função de transferência na forma racional, ou seja, conhecendo os valores dos coeficientes dos polinómios do numerador e do denominador bem como o valor respeitante ao atraso no tempo, caso exista.

O traçado do diagrama de Nyquist faz-se, fundamentalmente, em duas fases distintas: i) determinação ou cálculo dos pontos do diagrama, e ii) traçado propriamente dito (parte de representação gráfica). Como adiante se verá, o algoritmo para a determinação dos pontos a representar tem como objectivo evitar zonas de grande concentração bem como zonas com diminuto número de pontos, o que é conseguido, essencialmente, com base no critério de escolha das frequências associadas a cada um dos referidos pontos.

2.1 — Determinação dos pontos a representar

Quando esta técnica é seleccionada, o utilizador é solicitado a fornecer os seguintes dados:

— Dimensões exteriores (em cm) do desenho correspondente ao diagrama;
— Valores das frequências angulares máxima e mínima (em rad/s), ω_{max} e ω_{min}, entre as quais se pretende conhecer o diagrama.

O número máximo de pontos a representar, N, é fixado internamente, o mesmo acontecendo com as distâncias máxima e mínima (em cm), d_{max} e d_{min}, que se admitem entre dois pontos consecutivos.

Dado que os valores associados a estas distâncias limite são estabelecidos em centímetros e que as coordenadas dos pontos são calculadas em função de unidades de $G(j\omega)$, torna-se necessário conhecer os factores de escala (centímetros por unidades de cálculo) relativos aos dois eixos para que o critério das distâncias possa ser aplicado. Nestas condições, o procedimento preliminar adoptado consiste em calcular um número reduzido de pontos (cerca de 5 % de N), distribuídos entre ω_{min} e ω_{max}, e determinar, em seguida, os valores máximo e mínimo das coordenadas **x** e **y** respectivas; com estes valores e com o conhecimento, já adquirido, do comprimento total (em cm) dos dois eixos, aqueles factores de escala são então estabelecidos.

Os pontos referentes às frequências limite são sempre representados. Os valores das frequências de referência para o cálculo dos pontos intermédios, isto é, para os quais se verifica $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$, são tais que constituem uma progressão geométrica de N termos em que o primeiro e o último são ω_{min} e ω_{max}, respectivamente. Ter-se-á então que

$$\omega_i = r \cdot \omega_{i-1} \qquad (\omega_i > \omega_{i-1}) \tag{2.1}$$

em que a razão, r, é dada por

$$r = \exp\left[\frac{l_n(\omega_{max}/\omega_{min})}{N-1}\right] \tag{2.2}$$

O algoritmo respeitante à determinação dos pontos a representar, decorre da maneira que a seguir se descreve. Para uma determinada frequência ω_i são calculadas as coordenadas do ponto correspondente; em seguida, através dos factores de escala, é calculada a distância, $d(\omega_i)$, entre este ponto e o último ponto representado. Esta distância é comparara com os valores d_{min} e d_{max}, podendo

então verificar-se a ocorrência de um dos seguintes três casos:

1) $d_{min} \leqslant d(\omega_i) \leqslant d_{max}$
2) $d(\omega_i) < d_{min}$
3) $d(\omega_i) > d_{max}$

No primeiro caso, o ponto calculado é admitido como ponto a representar, dado que satisfaz o critério da distância, e as suas coordenadas são armazenadas numa variável indexada adequada.

No segundo caso, $d(\omega_i) < d_{min}$, o ponto calculado não é representado e passa-se então a outra frequência, obtida através de (2.1), repetindo-se o procedimento atrás exposto.

Finalmente, no terceiro caso, $d(\omega_i) > d_{max}$, o ponto calculado também não é representado e inicia-se um processo iterativo de modo a encontrar-se uma frequência ω_j tal que $\omega_{i-1} < \omega_j < \omega_i$, para a qual $d(\omega_j)$ satisfaça o critério de distância. As frequências ω_j são obtidas através da expressão

$$\omega_j = (\omega_{j-1} \cdot \omega_{i-1})^{1/2} \qquad (2.3)$$

tendo-se em conta que para $j=1$ se terá $\omega_{i-1} = \omega_i$. O ponto correspondente à frequência ω_j que satisfaça o critério de distância é então admitido como ponto a representar. O procedimento é então continuado sendo, no entanto, de referir que após este processo iterativo o primeiro ponto a ser submetido àquele critério é o anteriormente calculado e respeitante à frequência ω_i. Por outras palavras, neste terceiro caso, o algoritmo permite a representação de tantos pontos, correspondentes a frequências no intervalo (ω_{i-1}, ω_i), quantos os necessários para que o critério de distância seja satisfeito.

2.2 — Representação gráfica

Os valores das coordenadas dos pontos a representar são transmitidos a esta fase na qual o diagrama de Nyquist é traçado, utilizando-se para tal um algoritmo que não apresenta quaisquer características especiais.

Nesta fase, o utilizador pode ou não optar pela graduação do diagrama com valores da frequência angular. Esta graduação é feita pela colocação de marcas sobre o diagrama, com indicação do valor da frequência correspondente. Para se efectuar esta graduação utilizam-se os valores armazenados em «arrays» apropriados que contêm os valores da frequência e das coordenadas do ponto correspondente, valores estes obtidos durante a determinação dos pontos a representar. Os valores correspondentes a ω_{min} e ω_{max} são automaticamente considerados para este efeito; para além destes, os pontos utilizados para a graduação são aqueles cuja ordem de obtenção é um múltiplo de um número, internamente fixado, que é cerca de 10 % do número máximo de pontos a representar.

2.3 — Exemplos de aplicação

2.3.1 — *Exemplo I*

Neste exemplo determinou-se o diagrama de Nyquist do sistema

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-\alpha s} \; ; \; C(s) = 1 \; ; \; H(s) = 1$$

para $\alpha = 0$ (Fig. 2.1) e $\alpha = 1$ (Fig. 2.2).

FIG. 2.1

Note-se a modificação do diagrama resultante da introdução de atraso no sistema.

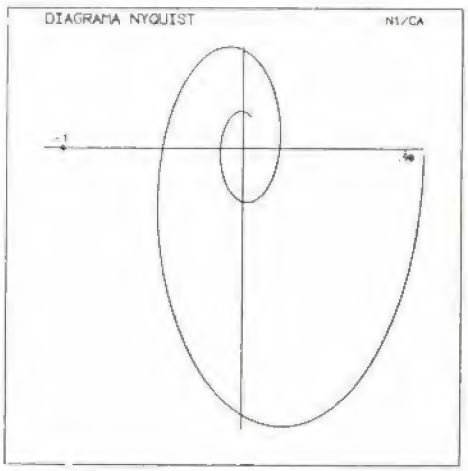


FIG. 2.2

2.3.2 — *Exemplo II*

Nas Fig. 2.3 e 2.4 mostra-se o diagrama de Nyquist obtido para o sistema

$$G(s) = \frac{80}{s^3 + s^2 + 100s} \; ; \; C(s) = 1 \; ; \; H(s) = 1$$

e parte do diálogo realizado entre o utilizador (caracteres sublinhados) e o programa.

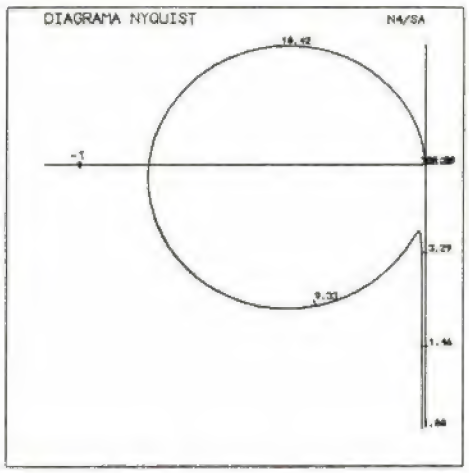


FIG. 2.3

```
REFERENCIA (ATE' 5 CARACTERES): N4/SA

FREQUENCIA ANGULAR MINIMA:1

FREQUENCIA ANGULAR MAXIMA:100

TRACADO DO DIAGRAMA DE NYQUIST

DIMENSOES EXTERIORES DO DESENHO
[8=<'X <=30 ; 8=< Y <=30  (CM)]
X,Y=12 12

GRADUACAO DO DIAGRAMA COM VALORES
DE FREQUENCIA (S OU N)? S

E AGORA? SUP
```

FIG. 2.4

3 — MÉTODO DE BODE

Este bloco permite ao utilizador obter o diagrama de Bode **[2, 3]** de um sistema, conhecida a sua função de transferência. No nosso caso, a implementação deste método implica o conhecimento não só do valor do atraso no tempo mas também dos coeficientes dos polinómios do numerador e do denominador daquela função na sua forma racional.

Tal como para as técnicas já atrás referidas, o algoritmo adoptado para a determinação dos pontos a representar no diagama de Bode tem em especial consideração o objectivo que consiste em evitar a desigual distribuição daqueles pontos. Ver-se-á adiante que este objectivo é conseguido através de uma escolha adequada das frequências correspondentes a esses pontos.

3.1 — Determinação dos pontos a representar

O diagrama de Bode é constituido por duas curvas que estabelecem o andamento do módulo e do ângulo de fase de $G(j\omega)$* em função da frequência angular ω(rad/s). Para o módulo e para a frequência usam-se escalas logaritmicas (na base decimal). Relativamente ao módulo, este expressa-se em unidades designadas por decibeis (dB), de tal modo que

$$|G(j\omega)|\,[\mathrm{dB}] = 20 \log |G(j\omega)| \qquad (3.1)$$

A estrutura do programa obriga a que o dominio da frequência seja constituido por um número inteiro de décadas de frequência. Assim, quando esta técnica é seleccionada, o utilizador é solicitado a fornecer o número de décadas, N_d, que pretende; para além deste dado, deve ainda indicar o número de pontos a representar, N, e o valor da frequência angular inicial, ω_1. O valor da frequência inicial deve ser uma potência positiva ou negativa de 10; caso o não seja, o algoritmo escolhe, automaticamente, o valor imediatamente inferior que satisfaça aquela condição, dando deste facto indicação ao utilizador.

Tendo em atenção o objectivo atrás mencionado, as frequências de cálculo ω_i são determinadas pela expressão seguinte

$$\omega_i = \omega_1 \,.\, 10^{\left[\frac{N_d\,(i-1)}{(N-1)}\right]} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (3.2)$$

Para cada uma desta N frequências são calculados os valores do módulo de $G(j\omega)$, em dB, e da fase, em graus, valores estes armazenados em variáveis indexadas adequadas.

3.2 — Representação gráfica

O algoritmo utilizado para a representação gráfica dos valores obtidos como atrás se indicou não apresenta quaisquer características especiais. Há, no entanto, que referir que nesta fase o utilizador deve indicar as dimensões exteriores (em cm) desejadas para o desenho do diagrama de Bode. São também indicados ao utilizador os valores máximo e mínimo seleccionados para o módulo e para a fase, os quais podem ser alterados, caso tal seja pretendido.

3.3 — Exemplos de aplicação

3.3.1 — *Exemplo I*

Neste exemplo determinou-se o diagrama de Bode do sistema

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 1.5s + 100}\, e^{-\alpha s} \;;\; C(s) = 1 \;;\; H(s) = 1$$

(*) Para simplicidade da exposição, designamos por $G(j\omega)$ quer a função de transferência em anel aberto (produto CGH) quer a função de transferência em anel fechado.

para $\alpha = 1$ (Fig. 3.1) e $\alpha = 0$ (Fig. 3.2).

Note-se a alteração na fase do sistema resultante da introdução de atraso.

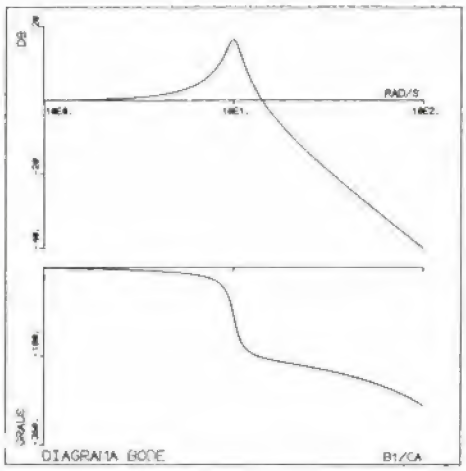


FIG. 3.1

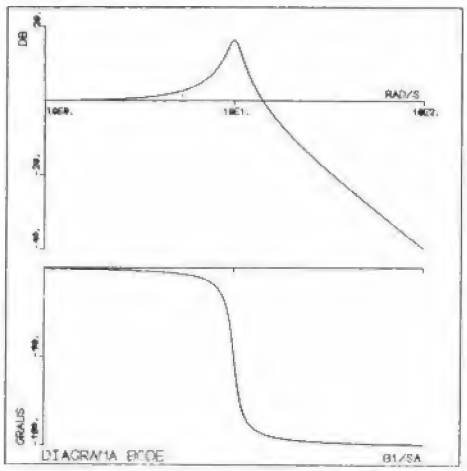


FIG. 3.2

3.3.2 — *Exemplo II*

Nas figuras 3.3 e 3.4 mostra-se o diagrama de Bode obtido para o sistema

$$G(s) = \frac{500\,s^2 + 500\,s + 40\,000}{s^4 + 11.5\,s^3 + 115\,s^2 + 1000\,s} \;;\; C(s) = 1 \;;\; H(s) = 1$$

e parte do diálogo realizado entre o utilizador (caracteres sublinhados) e o programa.

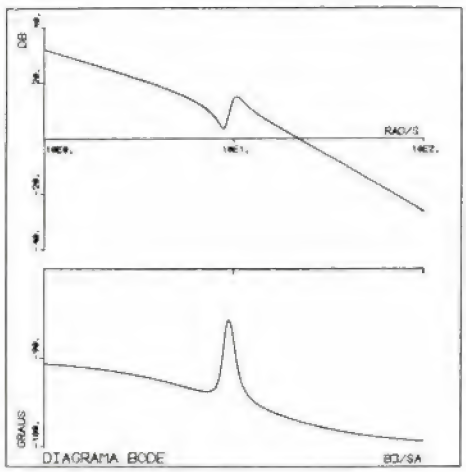


FIG. 3.3

```
REFERENCIA (ATE' 5 CARACTERES): B3/SA

NR. PONTOS DE CALCULO(<=1000)? NPT=500

NR. DE DECADAS DE FREQ.(>0 & <=5)? NDEC=2

FREQ. INICIAL(MULT. OU SUBMULT. DE 1)? WI(RAD/S)=1.2

TOMOU-SE PARA FREQ. INICIAL WI(RAD/S)= 1.0E+00

TRACADO DO DIAGRAMA DE BODE

DIMENSOES EXTERIORES DO DESENHO:
L0=' X <=30 & 0<= Y <=30  (CM)1
X,Y=12 12

VALORES EXTREMOS CALCULADOS-
REL.AMPLITUDES (DECIBEIS):
MAX= 5.172E+01
MIN= 7.205E+01
FASES (GRAUS):
MAX= 0.000E+00
MIN= 1.740E+02

QUER MODIFICAR (S OU N)? S

REL.AMPLITUDES (DECIBEIS):
NOVO MAX=40
NOVO MIN=-20

NOVO MIN DEVE SER >= MIN!
NOVO MIN=-40

FASES (GRAUS):
NOVO MAX=0
NOVO MIN=-180

E AGORA? SUP
```

FIG. 3.4

4 — RESPOSTA NO TEMPO DO SISTEMA

4.1 — Introdução

Este bloco permite determinar a resposta no tempo em anel aberto ou fechado de qualquer sistema, conhecidas as funções de transferência dos subsistemas constituintes, nomeadamente, do sistema controlado, do controlador e do sistema de retroacção.

A sequência de cálculo adoptada está indicada, de uma forma muito simplificada, no fluxograma da Fig. 4.1.

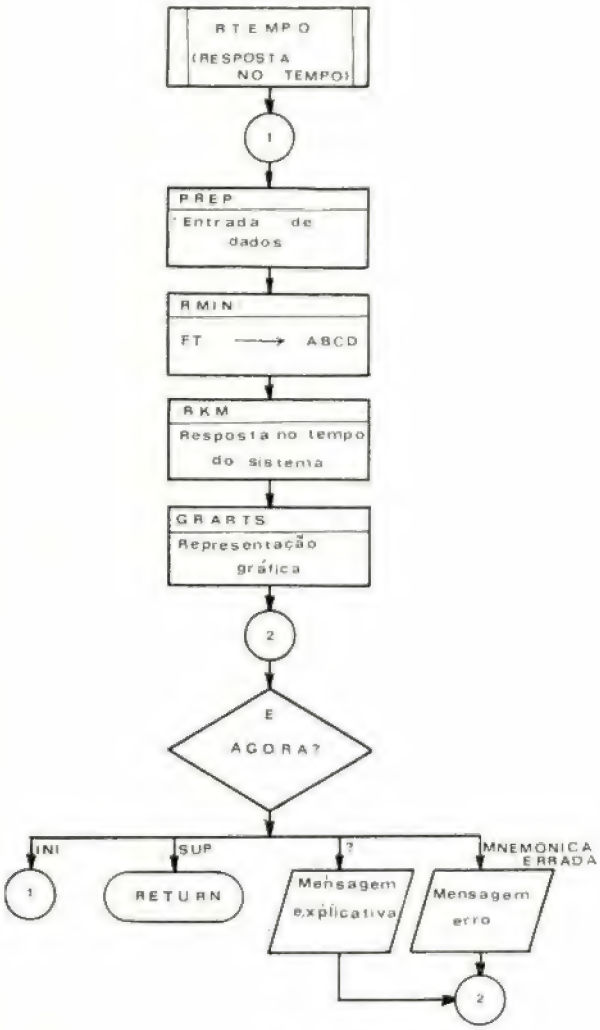


FIG. 4.1

A simulação do sistema é realizada com base na sua representação em Espaço de Estados, sendo esta determinada pela subrotina RMIN, já definida no Bloco de Manipulação de Dados **[1]**.

A integração das equações diferenciais da representação na forma de Espaço de Estados do sistema, é realizada pela rotina RKM, que utiliza o método de Runge-Kutta-Merson **[6]**.

4.2 — Resposta no tempo do sistema

Para determinar a resposta no tempo do sistema, é necessário definir um conjunto de parâmetros adicionais, indispensáveis à integração da sua representação em Espaço de Estados.

Estes parâmetros, introduzidos pela sub-rotina DSIMUL, chamada na sub-rotina RKM, são os seguintes:

- TI — tempo inicial
- TF — tempo final
- DT — incremento no tempo
- H — passo de integração
- FORM — forma da entrada

São ainda estabelecidos pelo programa o erro absoluto máximo por segundo ($E_{Max} = 0.00001$) e o valor inicial para as variáveis de estado ($x_j = 0, \forall_j$) dando-se a possibilidade ao utilizador de alterar estes valores, caso o pretenda.

A representação gráfica da resposta do sistema no tempo — Y(t) — será construida com base nos valores calculados para a saida nos instantes

$$t_n = t_{n-1} + DT$$

impondo-se como restrições de programação

$$10^{-5} \leqslant H \leqslant DT$$
$$NPT \leqslant 1000$$

em que

NPT — n.º de pontos de cálculo (NPT=1+(TF−TI)/DT)

4.2.1 — *Tipo de entrada*

Admitem-se as seguintes possibilidades para a forma de variação no tempo da entrada:

- DEG — entrada em degrau
- RAM — entrada em rampa
- PAR — entrada parabólica
- SIN — entrada sinusoidal
- VAR — entrada variável, definida numa tabela.

4.2.1.1 — *Entrada em degrau*

$$u(t) = \begin{cases} u_i & \text{para } t \geqslant TI \\ 0 & \text{para } t < TI \end{cases}$$

em que

u_i — constante real

4.2.1.2 — *Entrada em rampa*

$$u(t) = \begin{cases} R_p\ (t\text{-}TI) & \text{para } t \geqslant TI \\ 0 & \text{para } t < TI \end{cases}$$

em que

R_p — declive da função rampa (constante real positiva)

4.2.1.3 — *Entrada parabólica*

$$u(t) = \begin{cases} R_p\ (t\text{-}TI)^2 & \text{para } t \geqslant TI \\ 0 & \text{para } t < TI \end{cases}$$

em que

R_p — constante real positiva

4.2.1.4 — *Entrada sinusoidal*

$$u(t) = \begin{cases} u_i + A \sin[\omega(t-TI)] & \text{para } t \geqslant TI \\ 0 & \text{para } t < TI \end{cases}$$

em que

u_i — constante real
A — amplitude
ω — frequência angular

Os valores de u(t) correspondentes a instantes não definidos na tabela são obtidos por interpolação linear, tendo-se:

$$u(t) = \frac{(U_j - U_{j-1}) \cdot (t - T_{j-1})}{T_j - T_{j-1}} + U_{j-1} \text{ para } T_{j-1} < t < T_j$$

em que

U_j — valor tomado pela entrada no instante T_j

4.2.2 — *Integração de equações diferenciais pelo método de Runge-Kutta-Merson* **[6]**

O método utilizado na simulação de sistemas lineares univariáveis é o de Runge-Kutta-Merson de 5.ª ordem,

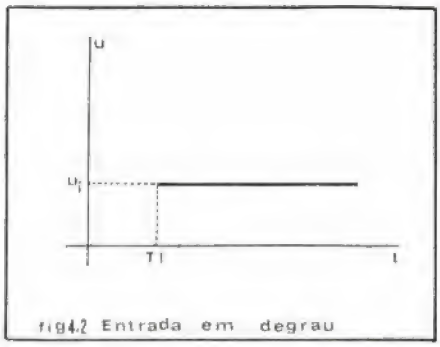


fig 4.2 Entrada em degrau

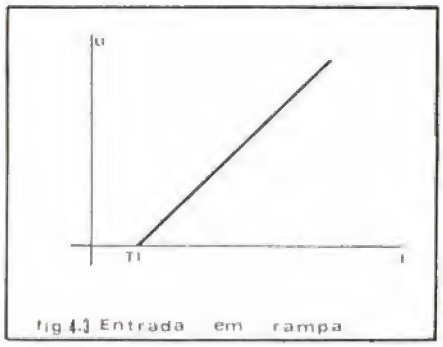


fig 4.3 Entrada em rampa

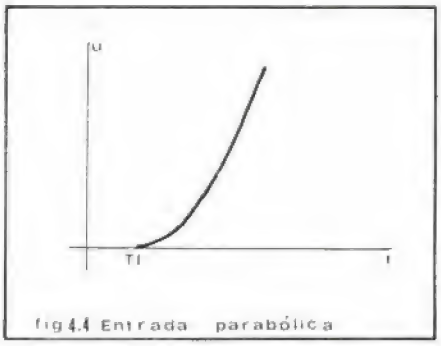


fig 4.4 Entrada parabólica

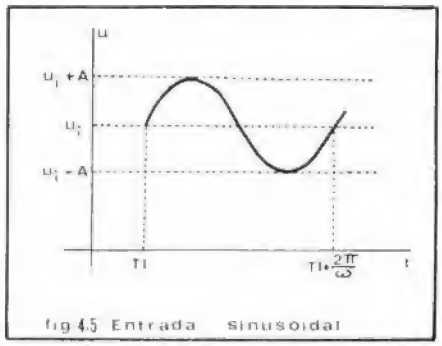


fig 4.5 Entrada sinusoidal

FIGS. 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5

4.2.1.5 — *Entrada variável*

Os valores tomados pela entrada e correspondentes instantes no tempo são definidos por uma tabela, sendo os pontos dados por ordem crescente do tempo, e obedecendo às seguintes condições:

- $T(1) \leqslant TI$
- $T(NP) \geqslant TF$
- $2 \leqslant NP \leqslant 100$

em que

NP — n.º de pontos da tabela.

que apresenta como vantagem fundamental a possibilidade de se controlar o passo de integração com base numa estimativa do erro cometido.

Consideremos um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d\,\mathbf{x}}{d\,t} = \mathbf{g}\,(\mathbf{x}, u)$$

A solução deste sistema de equações tem a forma geral

$$\mathbf{x}\,(t + h) = \mathbf{x}\,(t) + \sum_{i=1}^{5} w_i\,\mathbf{k}_i \qquad (4.1)$$

em que

h — passo de integração
k_i — incrementos calculados em diferentes pontos
w_i — pesos dos incrementos

Admitindo para os pesos dos incrementos, os valores

$$\begin{cases} w_1 = 1/6 \\ w_2 = w_3 = 0 \\ w_4 = 4/6 \\ w_5 = 1/6 \end{cases}$$

a expressão (4.1) assume a forma

$$x\ (t+h) = x\ (t) + (k_1 + 4k_4 + k_5)\ /6$$

sendo

$$k_1 = h\ .\ g\ (x\ ,\ u)_t$$
$$k_2 = h\ .\ g\ (x + k_1\ /3.,\ u)_{t+h/3}$$
$$k_3 = h\ .\ g\ (x + (k_1+k_2)/6.,\ u)_{t+h/3}$$
$$k_4 = h\ .\ g\ (x + (k_1+3k_3)/8.,\ u)_{t+h/2}$$
$$k_5 = h\ .\ g\ (x + (k_1-3k_3+4k_4)/2.,\ u)_{t+h}$$

Designando por $\varepsilon = [\varepsilon_i]$ a estimativa do erro cometido durante um passo de integração, tem-se

$$\varepsilon = (2\ k_1 - 9\ k_3 + 8\ k_4 - k_5)/30 \qquad (4.2)$$

Designando por $\varepsilon_n = [\varepsilon_{ni}]$ a normalização do erro relativamente ao passo de integração, tem-se

$$\varepsilon_{ni} = \left| \frac{\varepsilon_i}{h} \right|$$

A variação do passo de integração resulta da comparação de ε_{ni} e E_{max} de acordo com o seguinte quadro:

$\forall_i\ ,\ \varepsilon_{ni} \leqslant E_{max}$ e $\exists_i : \varepsilon_{ni} > E_{max}/64$	Mantém-se o passo de integração constante
$\forall_i\ ,\ \varepsilon_{ni} \leqslant E_{max}/64$	$H' = 2.H$ Considera-se válido o ponto calculado
$\exists_i : \varepsilon_{ni} > E_{max}$	$H' = H/2$ Não se considera válido o ponto calculado

4.3 — Exemplos de aplicação

Nas figuras 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 mostra-se a resposta no tempo obtida, em anel aberto, para o sistema

$$G(s) = \frac{156\text{-}25}{s^2 + 2.5\ s + 156.25}$$

$$C(s) = 1$$

$$H(s) = 1$$

Nota: A tracejado foi representado, pelo programa, o sinal de entrada do sistema.

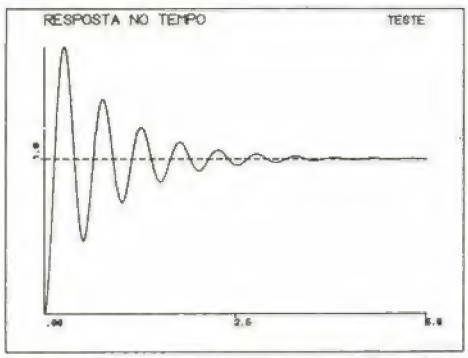


FIG. 4.6

Resposta do sistema ao degrau unitário

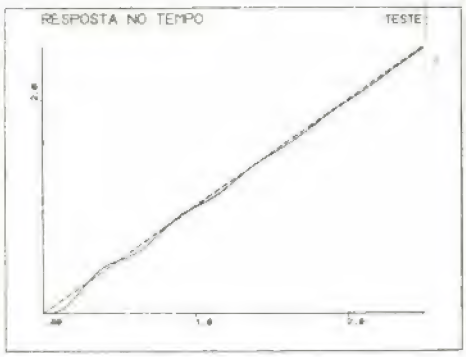


FIG. 4.7

Resposta do sistema ao sinal rampa unidade

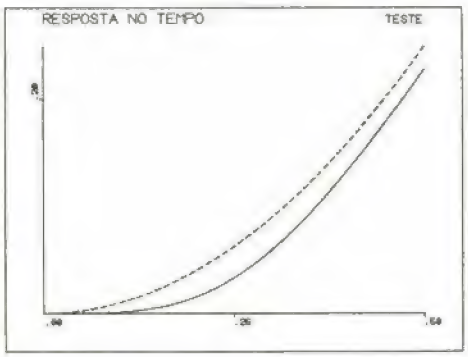


FIG. 4.8

Resposta do sistema ao sinal parábola unidade

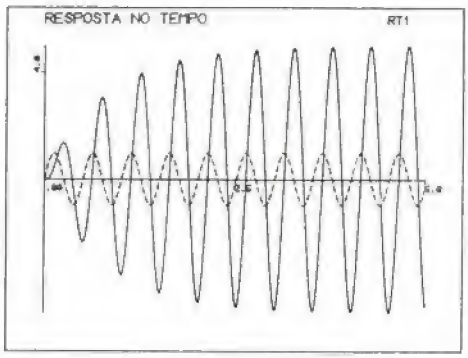


FIG. 4.9

Resposta do sistema ao sinal sinusoidal de amplitude unitária e frequência igual à frequência própria do sistema

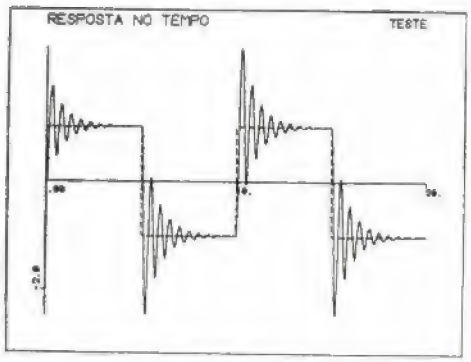


FIG. 4.10

Resposta do sistema à onda quadrada de amplitude unitária e período igual a 10 s

Na figura 4.10 o sinal de entrada (onda quadrada) foi gerado por pontos utilizando a facilidade criada pela entrada variável (VAR).

Na figura 4.11 apresenta-se uma parte do diálogo entre o utilizador (caracteres sublinhados) e o programa, realizado na obtenção da resposta do sistema à entrada sinusoidal (Fig. 4.9)

```
REFERENCIA (ATE' 5 CARACTERES): RT1

A RESPOSTA NO TEMPO SERA OBTIDA PARA OS INSTANTES T(N), TAIS QUE:
                    T(N)=T(N-1)+DT
SAO DADOS:
DT          INCREMENTO NO TEMPO
TI          TEMPO INICIAL
TF          TEMPO FINAL


TEMPO INICIAL =0

TEMPO FINAL =5

INCREMENTO NO TEMPO =.01

PASSO DE INTEGRACAO =.005

[ERRO ABSOLUTO MAXIMO =1.E-3]
PRETENDE MODIFICAR?S

ERRO ABSOLUTO MAXIMO= .01

[VARIAVEIS DE ESTADO INICIAIS NULAS]
PRETENDE MODIFICAR?N

TIPO DE ENTRADA: SIN

ENTRADA SINUSOIDAL

U=UI+AMP.SIN(W(T-TI))
DADOS:
UI          ENTRADA INICIAL
W           FREQUENCIA ANGULAR
AMP         AMPLITUDE


UINICIAL=0

AMPLITUDE=1

FREQUENCIA ANGULAR=12.5

INICIADA INTEGRACAO (R-K-M)

FIM DA INTEGRACAO


TRACADO DA RESPOSTA NO TEMPO

DIMENSOES EXTERIORES DO DESENHO
(8=< X <=30 ; 8=< Y <=30  (CM))
X,Y=12 9

E AGORA? SUP
```

FIG. 4.11

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **Lourtie, I.; Carvalhal, F. J. & Lourtie, P. M.** — *Projecto apoiado em computador de sistemas de controlo*, TÉCNICA, separata do n.º 254 (págs. 97 a 109), 1979.

[2] **D'Azzo, J. J. & Houpis, C. H.** — *Feedback control systems analysis & synthesis*, McGraw-Hill (I. S. E.), 2nd, ed., 1966.

[3] **Ogata, K.** — *Modern control engineering*, Prentice-Hall, 1970.

[4] **Pan, C. T. & Chao, K. S.** — *A computer-aided root locus method*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, n.º 5, October 1978 págs. 856-860).

[5] **Williams, P. W.** — *Numerical computation*, Thomas Nelson & Sons, 1972.

[6] **Lourtie, P. M.** — *Modelling, simulation, identification and control of a gas turbine*, Ph. D. thesis, University of Manchester, 1974.

Tecnologia da metanogénese
(Revisão descritiva)

MARIA CELESTE ANTUNES (')
SILVESTRE DIAS ANTUNES (") (*)

RESUMO

Neste artigo caracterizam-se as variáveis actualmente consideradas como fundamentais no processo metanogenético, descrevem-se as diferentes arquitecturas mais correntes nos digestores rurais, industriais e laboratoriais, sem que se faça qualquer análise quantitativa das relações matéria-prima — produtos. No entanto procura-se tanto quanto possível apresentar uma bibliografia exaustiva do estado actual da tecnologia de metanogénese.

ABSTRACT

In this article, variables nowadays considered as fundamental in the anaerobic digestion process are characterized, and the different architectures of digesters used in rural, industrial and laboratory applications are described. Although, if quantitative analysis of the transformation: prime matter — products is not considered, an exhaustive bibliography on the present state of the anaerobic digestion technology has been tried.

1 — INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o «aparecimento da crise energética» levou à necessidade do estudo das fontes de energia, e assim ressurgiu a *METANOGÉNESE*, isto é, o estudo da decomposição por via anaeróbia dos compostos orgânicos **[1, 2, 3, 4, 5]**, com produção simultânea de um gás combustível: o *BIOGÁS* (constituído por aproximadamente 60 % de metano).

O esquema da figura 1 sintetiza o processo da metanogénese. As matérias-primas (compostos orgânicos animais ou vegetais) fornecidas ao digestor (reactor biológico) são aí retidas durante algum tempo (tempo de residência), decompostas e transformadas nos produtos finais pela biomassa presente (população bacteriana). Esses produtos finais são:

— um gás combustível (o biogás); e,
— um resíduo líquido-sólido, que se utiliza como fertilizante.

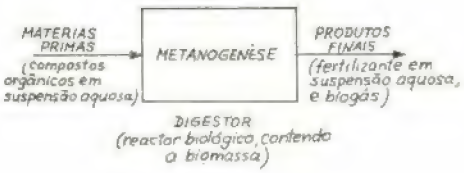


FIG. 1

O processo da metanogénese

A metanogénese com o objectivo exclusivo da produção energética de metano poderá não ser um processo economicamente viável. No entanto, a utilização da metanogénese é essencial para a *modificação do bem-estar* das populações que vivem em zonas não servidas pelas redes de distribuição de energia, permitindo assim:

(') — Licenciada em Farmácia (U. L.), estudante de pós-graduação na U. C. L. (Bélgica).
(") — Investigador na Unidade AUTOMATIQUE ET ANALYSE DES SYSTEMES da U. C .L. (Bélgica), Assistente do I. S. T. (Portugal).
(*) — Morada actual:

Université Catholique de Louvain
Unité Auto
Bâtiment Maxwell, Place du Levant
1348 — LOUVAIN-LA-NEUVE
Bélgica

Manuscrito recebido para publicação em 4/1/80.

— a produção de um gás combustível utilizável no aquecimento doméstico, ou na produção de energia eléctrica (recorrendo à utilização de motores de combustão interna em instalação fixa, do tipo do grupo TOTEM da fábrica FIAT [12]);

— a produção de adubos não-sintéticos;

— o tratamento de resíduos orgânicos (animais ou vegetais) focos de poluição; e,

— o fomento e respectivo desenvolvimento de uma produção animal e agrícola (fontes da matéria-prima para a produção do biogás e dos adubos não-sintéticos).

Aproveitamentos quer colectivos [7], quer individuais [6] têm sido efectuados e desenvolvidos com bons resultados em países onde ainda não existem redes de distribuição de energia, tais como a China e a Índia. Nesses casos o *digestor ideal* do tipo *faça-o você mesmo*, é construído com materiais (localmente) acessíveis, segundo técnicas que os governos põem à disposição das populações.

Em locais melhor servidos energeticamente (aglomerados populacionais, industriais,...) é imperioso o tratamento dos focos de poluição [8, 9] (tratamento de lixos, esgotos, resíduos industriais,...) e a metanogénese permite então aproveitar o biogás produzido como factor de recuperação dos investimentos efectuados nas instalações de tratamento.

Actualmente começam a surgir estudos [10, 11] de utilização da biomassa na produção de combustíveis líquidos, obtidos por diálise da fase líquida contida nos digestores.

Na figura 2, sintetiza-se esquematicamente o processo biológico da metanogénese (um dos esquemas actualmente proposto e em discussão pelos biólogos, ver referências [1] a [5]).

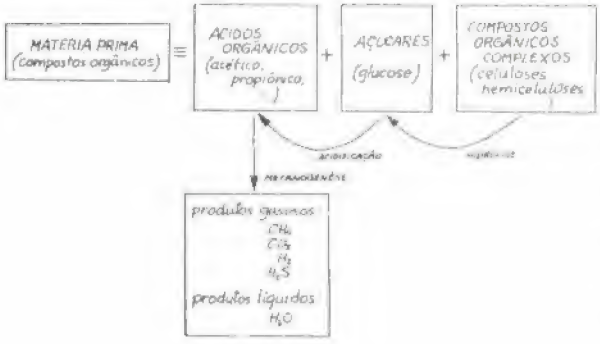


FIG. 2

Transformação biológica da matéria-prima

Nos parágrafos seguintes vamos ver como se caracterizam actualmente as matérias-primas existentes, estudar as características dos produtos da metanogénese e comparar a arquitectura dos diferentes tipos de digestores existentes.

2 — AS MATÉRIAS-PRIMAS

As matérias-primas de origem animal ou de origem vegetal após trituração e mistura adequada, ou pré-tratamento térmico, aeróbio, químico ou sónico, são introduzidas no digestor em suspensão aquosa (a percentagem de água depende essencialmente do tipo de digestor).

Inicialmente utilizavam-se apenas como matérias-primas os estrumes resultantes das explorações agrícolas-animais. Actualmente faz-se também o aproveitamento dos resíduos industriais não só com o objectivo da produção do biogás, mas essencialmente com o fim de tratar os efluentes industriais.

A caracterização das matérias-primas é complexa, e faz-se quantitativa e qualitativamente.

2.1 — Caracterização das matérias-primas: aspecto quantitativo

Ao alimentar um digestor define-se um caudal F de entrada da matéria-prima (volume por unidade de tempo) e um tempo θ de residência dessa matéria no digestor (que deve ser superior ao tempo necessário para a transformação da matéria). Se for V_D o volume da fase líquida do digestor, esse tempo será:

$$\theta = \frac{V_D}{F} \qquad (2.1.1)$$

Este tempo de residência da matéria no digestor, é condicionado pela velocidade de transformação da matéria, e esta depende da quantidade e tipo da biomassa presente, do tipo de digestor e da qualidade da matéria-prima.

No aspecto quantitativo podemos considerar três tipos de alimentação das matérias-primas: descontínua, intermitente e contínua.

Em digestores descontínuos (tipo *batch*), as matérias-primas são carregadas em simultâneo com a biomassa (resíduo parcial de uma *digestão anterior*) e a transformação processa-se sem alimentação posterior, até que deixe de haver produção do biogás, ou até que esta seja mínima, após o que se procede a um novo carregamento do digestor.

A alimentação intermitente (digestores contínuos) é vantajosa nos casos em que a obtenção da matéria-prima também é intermitente, evitando-se nesse caso a necessidade de uma armazenagem inicial. É o que se verifica nas instalações agrícolas-animais onde os resíduos da exploração são recolhidos diariamente, e diariamente introduzidos no digestor.

A alimentação contínua (digestores contínuos) é importante no caso do tratamento de efluentes provenientes de indústrias de produção contínua.

2.2 — Caracterização das matérias-primas: aspecto qualitativo

A determinação da qualidade de uma matéria-prima é difícil. Vários métodos têm sido utilizados,

dependendo essencialmente da natureza dos substractos consumidos pela biomassa presente no digestor. Vejamos cada um dos métodos:

2.2.1 — Análise química ponderal dos elementos químicos mais importantes: carbono, hidrogénio, oxigénio, azoto, fósforo e enxofre presentes na matéria-prima. Determina-se deste modo uma fórmula química aproximada $C_aH_bO_cN_dP_eS_f$ com base na qual poderão determinar-se [13, 14] os produtos químicos das reacções hipoteticamente realizadas no digestor.

Atendendo a que o carbono e o azoto são elementos fundamentais, utiliza-se correntemente como coeficiente de qualidade de uma matéria-prima a proporção: carbono/azoto (C/N) indicando-se como valor ideal para a digestão o valor 30/1. Ainda que o valor 30/1 seja o ideal, a matéria-prima poderá apresentar uma digestão mais ou menos difícil (demorada) consoante a forma sob a qual se apresentam os diferentes elementos.

2.2.2 — Análise física ponderal por aquecimento prolongado a temperaturas constantes: a análise física ponderal após aquecimento prolongado a temperatura constante permite a determinação das matérias que se volatilizam dentro de determinadas gamas de temperatura. Assim utilizam-se correntemente [6] as seguintes definições:

— *SÓLIDOS TOTAIS* (ST) — composição ponderal da matéria-prima em sólidos residuais após aquecimento prolongado (aproximadamente 4 horas) a 105 °C (secagem total);
— *SÓLIDOS VOLATEIS* (SV) — composição ponderal da matéria-prima em sólidos que se volatilizam após secagem total (isto é, após determinação dos sólidos totais) por aquecimento prolongado (aproximadamente 8 horas) a 450 °C;
— *CINZAS* (C_{in}) — composição ponderal da matéria-prima em sólidos residuais após aquecimento prolongado (aproximadamente 3 horas) a 1000° C; e,
— *CARBONATO DE CÁLCIO* (C_aCO_3) — composição ponderal da matéria-prima em sólidos volatilizados entre os 450° C e os 1000° C, expressa em carbonato de cálcio:

$$C_aCO_3 = (ST\text{-}SV\text{-}C_{in}) \cdot \frac{100}{44} \qquad (2.2.1)$$

A escolha da técnica de determinação da qualidade é discutível, na medida em que, a análise química ponderal é extremamente complexa e conduz a resultados pouco reais. A análise física ponderal parece ser mais real dado considerarem-se actualmente os sólidos voláteis [15, 16] como fontes mais prováveis do metano produzido pela biomassa.

No caso dos efluentes industriais utiliza-se correntemente como característica de qualidade da matéria-prima um dos parâmetros: *demanda química* (COD) ou *bioquímica* (BOD) do oxigénio necessário para a oxidação total das matérias transportadas pelos referidos efluentes.

No aspecto de qualidade determina-se ainda o pH da matéria-prima, factor considerado como um dos mais importantes para a sobrevivência da biomassa (meio ambiente da biomassa), e/ou para que se não produza inibição da sua actividade.

Como qualidade da matéria-prima deve ainda considerar-se a presença de biomassa activa. Em particular, nas matérias de origem animal (como no caso dos excrementos dos ruminantes). Actualmente uma só técnica [17] permite caracterizar a fracção metanogenética dessa biomassa: a análise do coenzima F_{420}, que dá uma indicação aproximada da biomassa metanogénica activa presente na matéria analisada.

3 — BIOMASSA

Designa-se por biomassa o conjunto das populações bacterianas activas que permitem a decomposição da matéria-prima com produção simultânea de biogás. No esquema da figura 2 apresentou-se o conjunto das diferentes fases consideradas no tratamento anaeróbio dos compostos orgânicos.

A classificação, caracterização e funções da biomassa, tal como a sequência efectiva de decomposição da matéria, não é ainda bem conhecida. Várias classificações têm sido apresentadas pelos biologistas (ver referências [1] a [5]). É difícil fazer uma análise termodinâmica das reacções complexas desenvolvidas durante a metanogénese, pois que a cinética de formação de certos produtos intermédios (tais como ácidos orgânicos em C_2, C_3, ...) inibidores da acção metanogenética é difícil de prever [18].

A actividade da biomassa presente (entenda-se por actividade biológica a formação de nova biomassa com produção de produtos secundários no digestor) depende, das condições do meio ambiente da biomassa:

— do pH, e este do poder tampão do meio;
— da temperatura ambiente; e,
— da presença de produtos químicos (tóxicos, inibidores e/ou estimulantes).

A temperatura é talvez o factor ambiente fundamental dado que o tipo da biomassa metanogénica depende desta. Consideram-se [19] normalmente três tipos de biomassa metanogénica de características diferentes consoante a temperatura a que desenvolvem a sua actividade máxima. Assim existem:

— uma biomassa criófila — cuja actividade é máxima a temperaturas de 12 a 18° C;
— uma biomassa mesófila — cuja actividade é máxima a temperaturas de 25 a 40° C; e,
— uma biomassa termófila — cuja actividade é máxima a temperaturas de 55 a 65° C.

As biomassas mais utilizadas são de natureza mesófila (por razões económicas — aquecimento dos di-

gestores), ainda que a utilização de biomassas termófilas pudesse ter vantagens, nomeadamente na eliminação de organismos patogénicos e na degradação de compostos orgânicos complexos.

4 — OS DIGESTORES (REACTORES BIOLÓGICOS)

O digestor ou reactor biológico ideal será aquele em que toda a matéria-prima introduzida é transformada em biogás, e cujos produtos finais sejam um líquido isento de matéria-prima e de biomassa.

A impossibilidade da transformação total da matéria-prima por via anaeróbia, permite a utilização do resíduo sólido-líquido como fertilizante na agricultura, quer directamente, quer após tratamento adequado. O fertilizante obtido por via anaeróbia tem sobre o obtido por via aeróbia, a vantagem de conter uma menor percentagem de micro-organismos vivos e de conter uma maior percentagem de azoto.

Existem diversos tipos de digestores, cuja forma e tecnologia dependem de diversos factores:

— a localização e temperatura ambiente, que levam à necessidade de aquecer ou não os digestores consoante a natureza da biomassa utilizada;
— a natureza da matéria-prima utilizada (efluente industrial, resíduo agrícola-animal,...);
— modo de alimentação do digestor (contínua, descontínua ou intermitente);
— estrutura da matéria no digestor: homogénea ou heterogénea (digestor com ou sem agitação); e,
— tipo do digestor: rural ou industrial (eventualmente laboratorial).

Vamos apresentar a arquitectura de alguns tipos de digestores. Assim consideraremos:

— digestores convencionais:

- do tipo descontínuo *(batch)*; e,
- do tipo contínuo de alimentação intermitente.

— digestores com realimentação de sólidos decantados;
— digestores com fases cineticamente separadas (acidificação e metanogénese separadas);
— filtros anaeróbios;
— digestores do tipo de escoamento vertical *(up-flow)*; e,
— digestores heterogéneos do tipo de escoamento sólido *(plug-fow)*.

No quadro I indicam-se as matérias-primas mais utilizadas para cada tipo de digestor, e as figuras 3, 4 e 5 representam convencionalmente alguns dos tipos de digestores.

QUADRO I

Tipos de digestores e matérias-primas mais utilizadas

TIPO DE DIGESTOR:		TIPO DE MATÉRIA-PRIMA:	
		Resíduo de exploração agrícola-animal	Efluentes industriais
Digestor convencional	descontínuo	•	
	contínuo	•	•
Digestor com realimentação de sólidos decantados ...		•	•
Digestores com fases cineticamente separadas		•	•
Filtro anaeróbio			•
Digestores do tipo *up-flow*			•
Digestores do tipo *plug-flow*...		•	

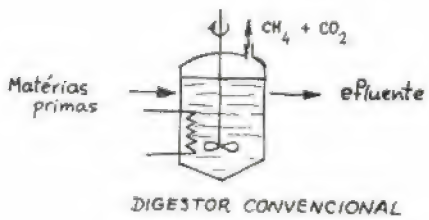


FIG. 3

Digestor convencional homogéneo

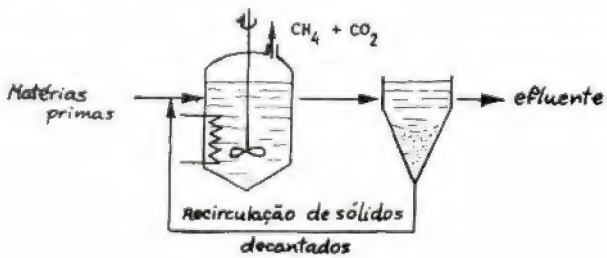


FIG. 4

Digestor convencional com realimentação de sólidos decantados

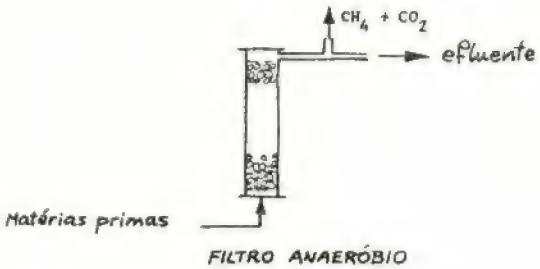


FIG. 5

Filtro anaeróbio

4.1 — Digestores convencionais

Os digestores convencionais são de dois tipos. *O mais antigo, e mais conhecido é o digestor descontínuo* (ou de tipo *batch*) em que a matéria-prima é introduzida em conjunto com a biomassa num reservatório, desenvolvendo-se a produção do biogás durante um período de tempo mais ou menos extenso, função da dimensão do reservatório (isto é, da quantidade de matéria-prima) e da quantidade de biomassa inicial.

Segundo Lagrange, B. [*20*], existem em Portugal três digestores deste tipo, que funcionam sem problemas desde há vinte anos.

O manual da W. P. C. F. [*29*] apresenta alguns desenhos de digestores do tipo descontínuo, em betão armado:

— digestores com cobertura em aço, fixa, porém amovível (figura 6); e,
— digestores com cobertura em aço, móvel (figura 7).

Mas poderão ainda considerar-se o caso de digestores com cobertura deformável, funcionando esta como reservatório para gás (figura 8) [**25**].

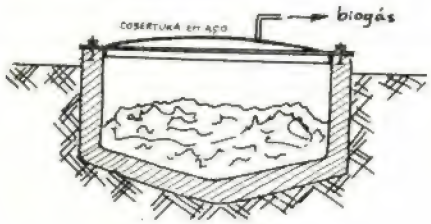


FIG. 6

Digestor em betão armado com cobertura fixa, amovível [**29**]

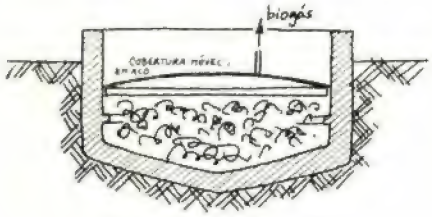


FIG. 7

Digestor em betão armado com cobertura móvel [**29**]

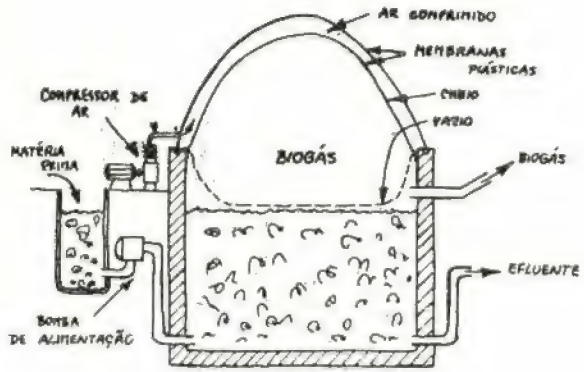


FIG. 8

Digestor com cobertura deformável, funcionando como reservatório para o biogás [**25**]

Os *mais utilizados*, dada a sua grande expansão nas pequenas explorações agrícolas-animais são os digestores convencionais de alimentação intermitente.

Nas figuras 9 a 23 apresentam-se várias arquitecturas de digestores do tipo convencional, indicando-se sempre que possível a sua origem e referências bibliográficas.

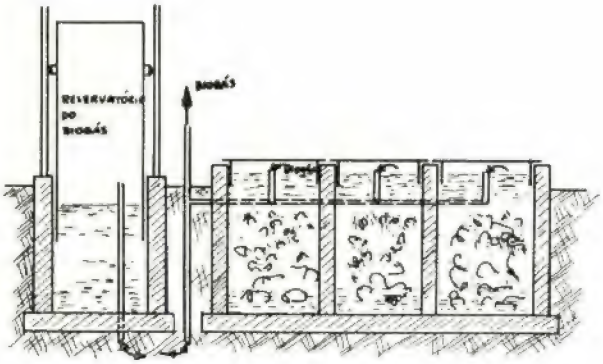


FIG. 9

Digestor convencional descontínuo, tipo indiano [**22**]

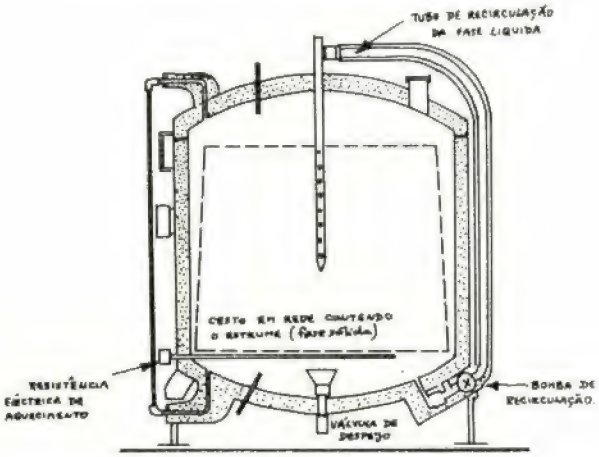


FIG. 10

Digestor convencional descontínuo, tipo I. N. R. A. (França) [**21**]

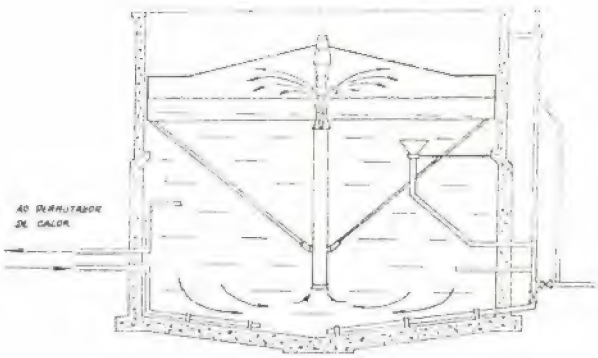


FIG. 11

Projecto industrial de um digestor convencional descontínuo com agitação e bombagem em circuito fechado da matéria líquida de modo a evitar a formação de uma camada de espuma que possa impedir a saída do biogás, segundo Horton, R. [33]

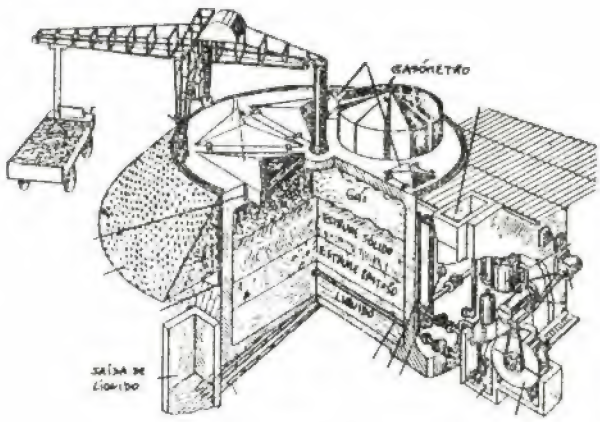


FIG. 14

Esquema da instalação de tratamento de estrumes em digestor convencional com carga-descarga motorizada [35]

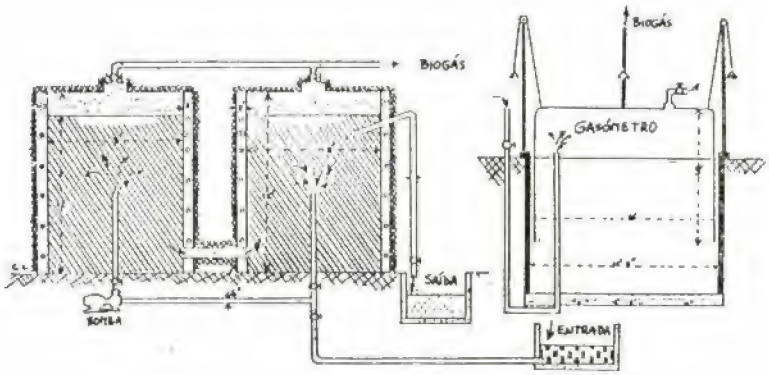


FIG. 12

Digestor convencional com alimentação intermitente e armazenamento do gás em gasómetro (Índia)

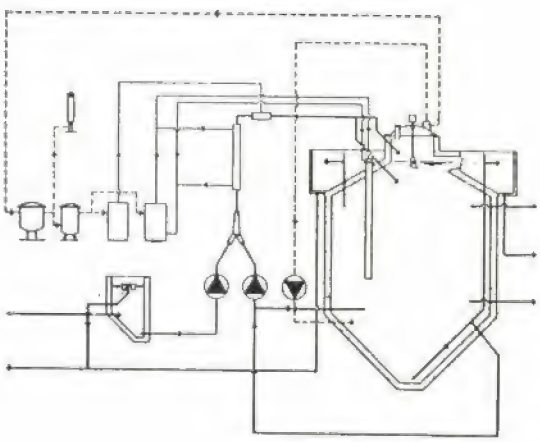


FIG 13

Projecto industrial de um digestor do tipo convencional para alimentação intermitente ou contínua

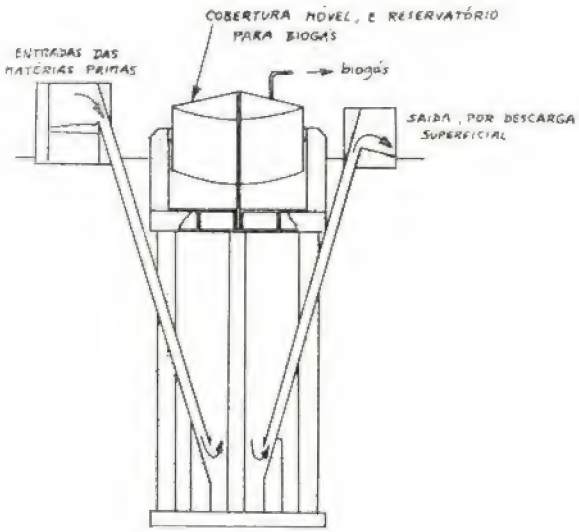


FIG. 15

Forma típica do digestor convencional de alimentação intermitente, tipo indiano [30]

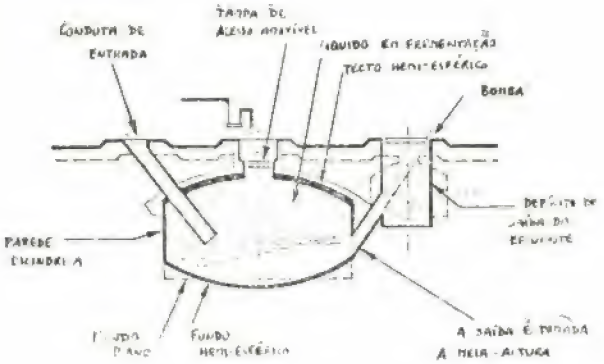


FIG. 16

Forma típica dos digestores do tipo chinês [32]

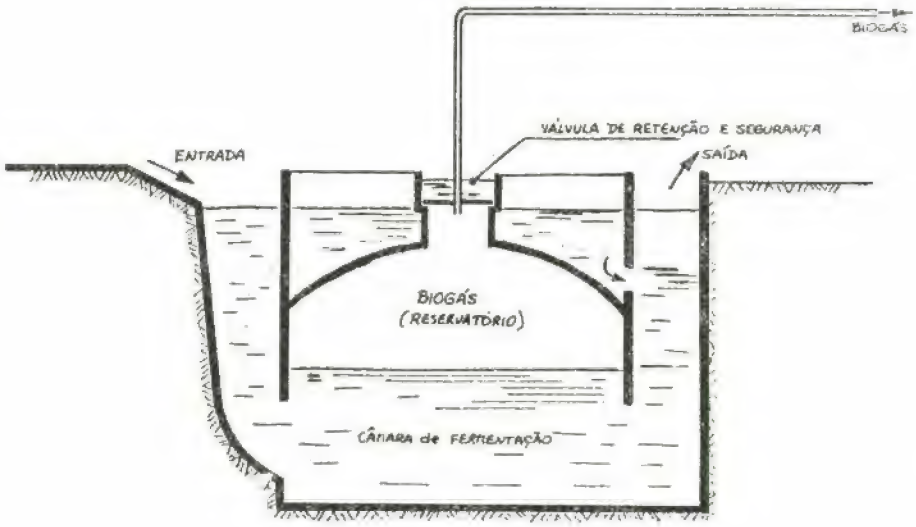


FIG. 17

Forma típica de uma instalação de produção de biogás do tipo chinês, segundo a FAO Soils Bulletin [32]

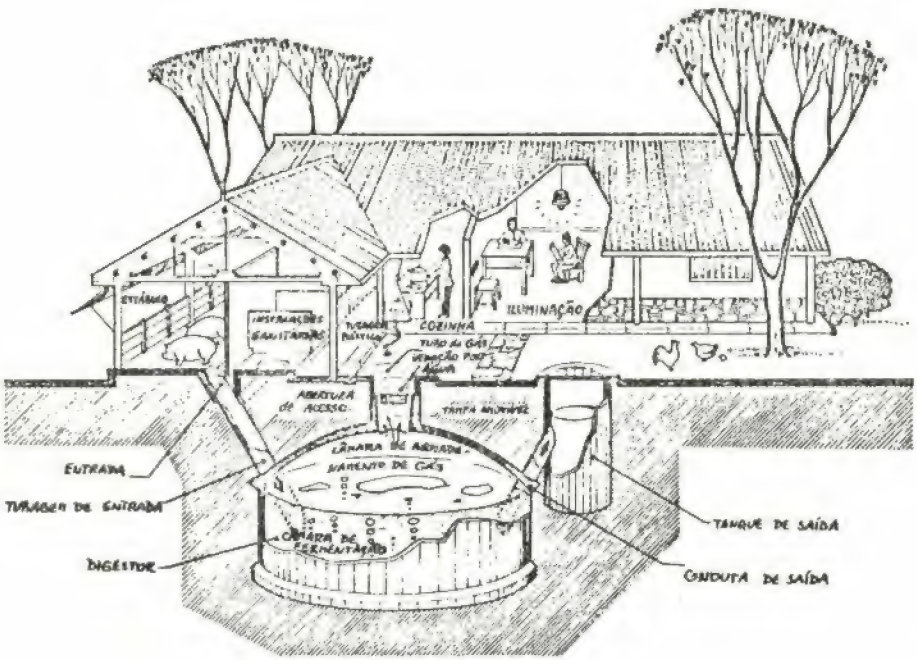


FIG. 18

Exemplo de uma instalação integrada tipo chinês [32], para tratamento de resíduos agrícolas-animais e domésticos

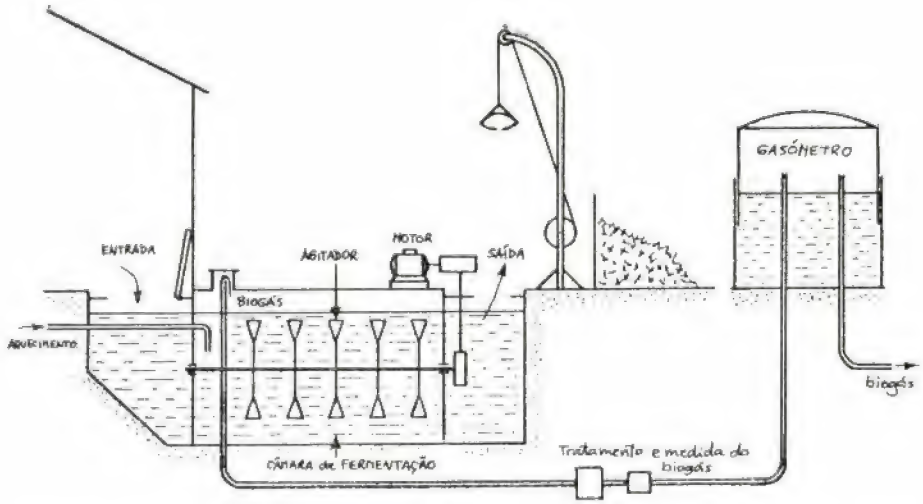


FIG. 19

Digestor convencional com agitação contínua ou intermitente, de tipo semelhante ao chinês, segundo Horton, R. [33]

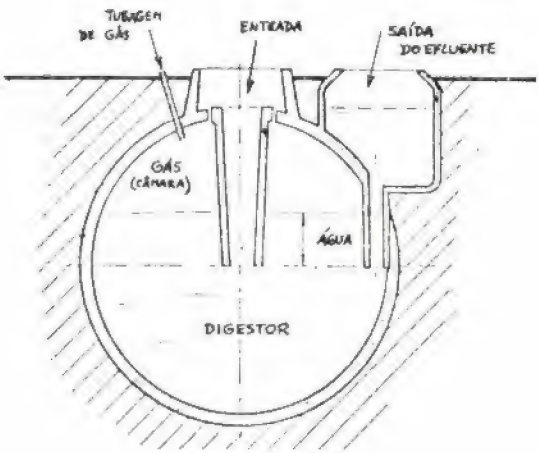


FIG. 20

Digestor chinês tipo esférico, de pequenas dimensões [31]

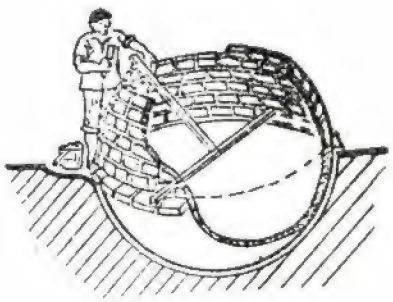


FIG. 21

Técnica de construção do digestor chinês, tipo esférico [31]

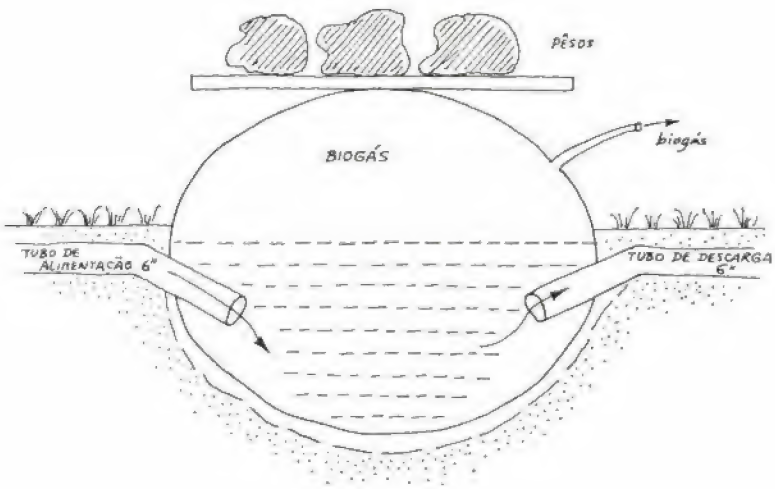


FIG. 22

Digestor tipo saco (saco em neoprene) utilizado em Taiwas, segundo Pyle, D. L. [34]

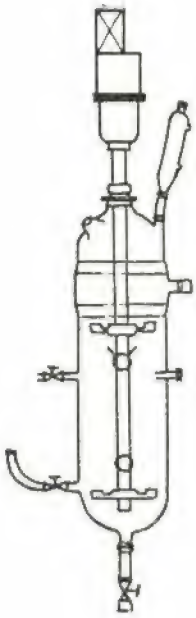


FIG. 23

Digestor convencional de alimentação intermitente, tipo laboratorial (60 l de volume útil), segundo Nyns, E. J. et al. [30]

4.2 — Digestores com fases cineticamente separadas

Segundo Gosh, S. et al. [36] a digestão em duas fases cineticamente separadas (acidogénese e metanogénese) apresenta vantagens e desvantagens. Assim:

— melhora-se a possibilidade de manter para cada grupo de bactérias (acidificantes e metanogénes) as condições ideais de actividade, ainda que actualmente tal separação seja considerada prejudicial pois considera-se [1, 2, 3, 4, 5] que as referidas bactérias actuam em simbiose;

— reduz-se o custo do digestor dado que o volume total é menor;

— aumenta-se a produção de metano; e,

— reduz-se a quantidade de energia utilizada no aquecimento do digestor, pois só a fase metanogénica deve ser aquecida.

Apesar de tudo, este processo é mais caro pois carece de mais instrumentação e além disso a instalação é mais difícil, ainda que a separação seja cinética.

Na figura 24 representa-se esquematicamente a constituição de um digestor deste tipo.

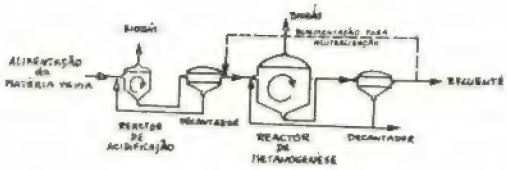


FIG. 24

Digestor com fases cineticamente separadas, segundo Gosh, S. et al. [36]

4.3 — Filtros anaeróbios

Quando as matérias-primas não apresentam substâncias em suspensão (caso típico dos efluentes industriais) têm-se utilizado com bons resultados filtros anaeróbios (vejam-se Scammell, W. [8], Chian, E. S. K. [37] e Dewalle, F. B. et al. [38]). Nestes casos a matéria-prima tem de atravessar os filtros (constituídos por fragmentos de quartzo, lâminas plásticas,...) onde está provavelmente fixada a biomassa activa.

Na figura 25 apresenta-se o caso de um filtro anaeróbio homogéneo, homogeneidade essa garantida por uma recirculação contínua do efluente do filtro.

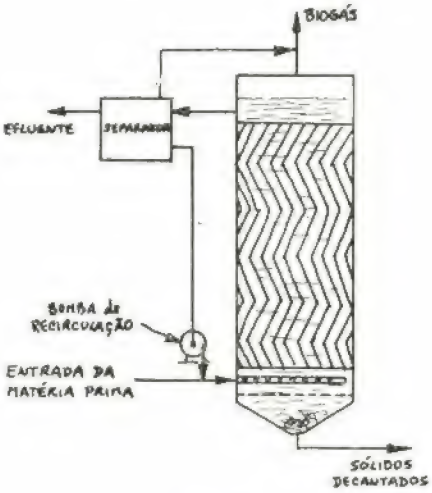


FIG. 25

Filtro anaeróbio homogéneo, segundo Chian, E. S. K. et al. [37]

4.4 — Digestores do tipo de escoamento vertical *(up-flow)*

No tratamento de efluentes industriais de grande débito, a utilização de filtros anaeróbios torna-se difícil dado que são facilmente colmatados. Assim surgiram recentemente (ver Heertjes, P. M. et al. [39]) digestores do tipo de escoamento vertical *(up-flow)*, em que o efluente a tratar é introduzido no fundo de um reservatório aberto de grandes dimensões. Dentro deste reservatório um sistema de captura de gases permite recolher o biogás. É então facilitada a decantação das partículas sólidas (figura 26) e a saída do efluente tratado faz-se pela zona superior do reservatório.

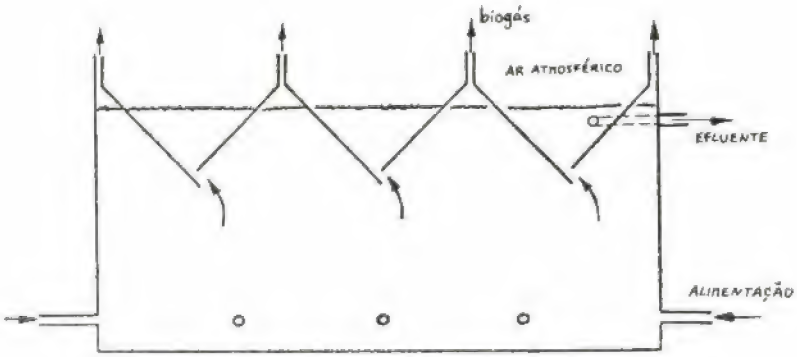


FIG. 26

Esquema tipo de um digestor de escoamento vertical, segundo Horton, R. [33]

4.5 — Digestores do tipo de escoamento sólido *(plug-flow)*

No tratamento de resíduos das explorações agrícolas-animais, a matéria-prima apresenta-se sob a forma pastosa, o que dificulta a sua homogeneização. Assim, Fry, L. J. [40] construiu um digestor (de alimentação intermitente) do tipo de escoamento sólido *(plug-flow)*, em que a matéria a tratar é lentamente arrastada ao longo do digestor (figura 27).

5.1 — O biogás: características e segurança no armazenamento

O biogás é uma mistura de gases na qual cerca de 60 % é metano (CH_4). Os restantes 40 % são constituídos essencialmente por anidrido carbónico (CO_2) e outros gases, tais como, o gás sulfídrico (H_2S) e o hidrogénio (H_2), ainda que estes últimos em muito pequena percentagem.

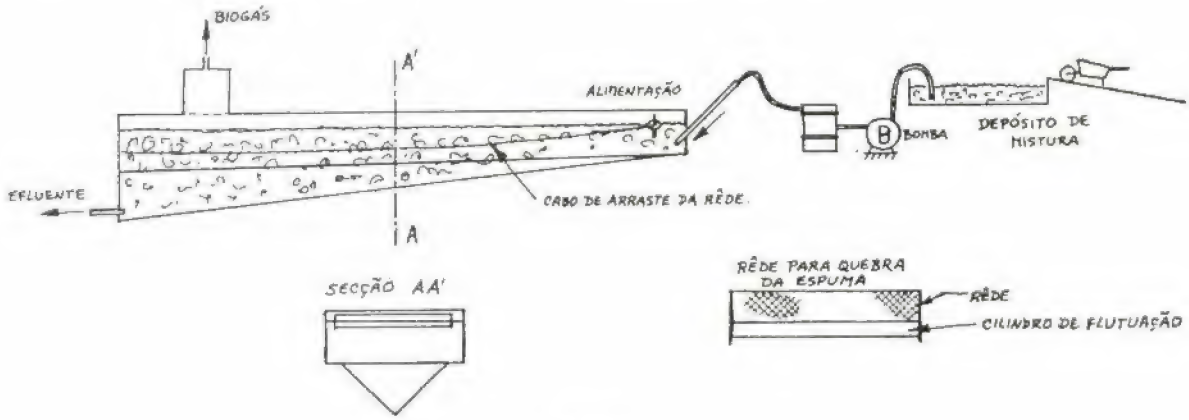


FIG. 27

Digestor do tipo de deslocamento sólido **(plug-flow)**, segundo Horton, R. [33]

5 — OS PRODUTOS DA DIGESTÃO ANAERÓBIA

Como se indicou atrás (figura 2) a digestão anaeróbia pode considerar-se constituída por duas fases: uma ácida e outra metanogénica. Segundo Cohen, A. et al. [23] os produtos fundamentais da fase ácida são o anidrido carbónico, o hidrogénio e os ácidos voláteis (acético, propiónico, butírico, fórmico,...), enquanto que os da fase metanogénica são o metano e o anidrido carbónico obtidos a partir dos ácidos e do hidrogénio formados durante a fase ácida.

Vejamos as características fundamentais e problemas de armazenamento do biogás bem como do resíduo sólido-líquido utilizado como fertilizante.

Nos quadros II e III, resumem-se segundo Wheatley, B. I. [24] as propriedades químicas, físicas e fisiológicas mais importantes destes gases.

Dohne, E. [25] apresenta alguns dos problemas relativos ao armazenamento do biogás. Entre eles salientemos:

— *Perigo de explosão e incêndio* — a mistura metano-ar só é explosiva na gama de concentrações: 5-15 %. No gráfico junto (figura 28), segundo Mosey, F. E. [26], apresenta-se o domínio de explosão da mistura metano-ar.

QUDARO II

Propriedades químicas e físicas do biogás produzido na digestão anaeróbia

Propriedade	CH_4	CO_2	H_2S	H_2	Biogás típico (60 % CH_4 — 40 % CO_2)
% volume	54-80	20-45	1/10	0,0-10	100
Valor energético (Kcal/l)	9,0	—	—	2,9	5,4
Gama de explosão (% vol. em ar)	5-15	—	4-46	6-71	6-12
Densidade PTN (g/l)	0,72	1,98	1,54	0,99	1,22
Peso específico (relativo ar)	0,55	1,5	1,2	0,07	0,93
Temperatura crítica (ºC)	−82,5	31,1	100,4	−239,9	
Pressão crítica (bar)	45,8	73,0	88,9	12,8	
Odor	nenhum	nenhum	ovos podres	nenhum	

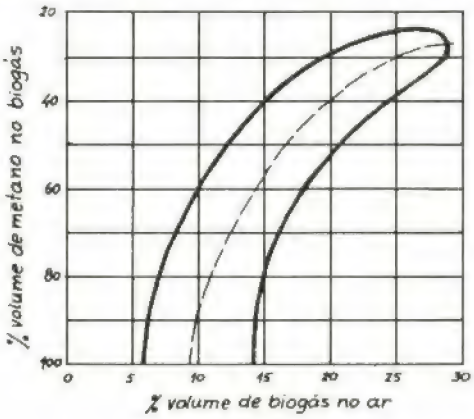


FIG. 28
Mistura explosiva biogás-ar [26]

QUADRO III

Propriedades fisiológicas do biogás produzido na digestão anaeróbia

Gás componente do biogás	Conc. no ar atmosférico (ppm)	Conc. no ar atmosférico (% volume)	Período de exposição (¹)	Efeitos fisiológicos
CH_4	500 000	50	—	ASFIXIANTE dores de cabeça, não tóxico
CO_2				ASFIXIANTE
	20 000	2	—	inofensivo
	30 000	3	—	resp. difícil
	40 000	4	—	sonolência, dores de cabeça
	60 000	6	30 min.	asfixia
	300 000	30	30 min.	pode ser fatal
H_2S				VENENOSO
	100	0,01	horas	irritação dos olhos e do nariz
	200	0,02	60 min.	dores de cabeça, vertigens
	500	0,05	30 min.	náuseas, excitação, insóneas
	1 000	0,1	—	inconsciência, morte

(¹) — Considera-se a exposição de um adulto humano de peso médio 68 Kg, ou outro animal de peso equivalente. Animais de peso inferior são afectados mais rapidamente, e animais mais pesados são afectados mais lentamente suportando pois níveis de concentração superiores.

— *Toxicidade* — o principal problema é o da existência de gás sulfídrico (só perceptível em baixas concentrações), que sendo mais denso que o biogás ou o ar atmosférico, tende a acumular-se nas zonas mais baixas. É portanto conveniente que as instalações de armazenagem sejam bem arejadas. O anidrido carbónico ainda que asfixiante não é tóxico e por isso não levanta problemas.

— *Corrosão* — o gás sulfídrico é altamente corrosivo mas só em presença do ar, logo não há perigo de corrosão no interior das instalações de digestão. Deve apenas, tanto quanto possível, evitar-se o contacto do biogás com metais tais como o cobre ou o latão.

Quanto à armazenagem, Dohne, E. [25] recomenda o pré-tratamento do biogás com hidróxido férrico para eliminação do gás sulfídrico (ver figura 29). Atendendo a que a liquefacção é difícil, considera para o armazenamento:

— a compressão a altas pressões (200-300 bar);
— a compressão a médias pressões (10-20 bar);
— o depósito a baixas pressões (do gás seco ou húmido) em gasómetros (a pressões da ordem dos 50 mbar); e,
— a solubilidade em hidrocarbonetos líquidos (nomeadamente no propano).

A utilização de altas pressões para a compressão do gás, ainda que viável exige compressores especiais e a energia consumida é da ordem de grandeza da armazenada, daí o não ter grande interesse a utilização deste método.

Mesmo a utilização da compressão a médias pressões não é corrente dada a necessidade de utilizar compressores construídos com materiais anticorrosivos de custo relativamente elevado.

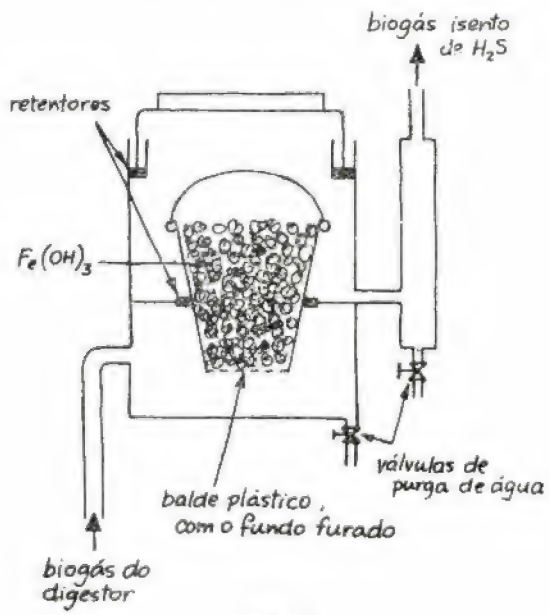


FIG. 29

Dispositivo de absorpção do H_2S, segundo Dohne, E. [25]

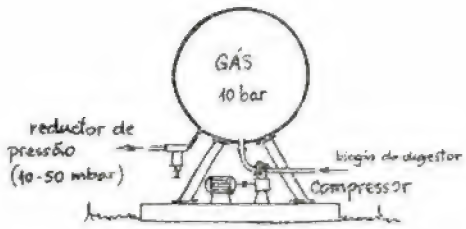


FIG. 30

Armazenamento do biogás a média pressão [25]

O armazenamento em gasómetros (figura 31) a baixa pressão, é o processo correntemente utilizado. Actualmente começam contudo a utilizar-se *balões de gás* comprimidos por cargas (ver figuras 32, 33 e 34), e mesmo a construirem-se digestores cuja cobertura de isolamento com o ar atmosférico é uma capa plástica funcionando como reservatório de gás (ver figura 35).

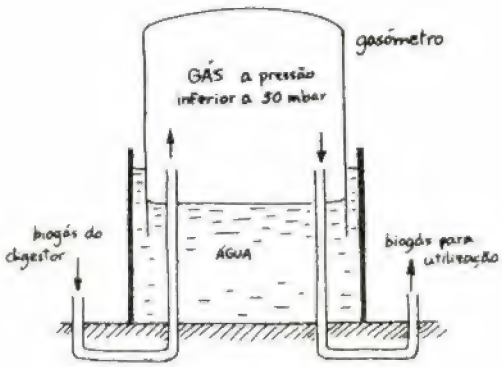


FIG. 31

Gasómetro para armazenamento do gás húmido [25]

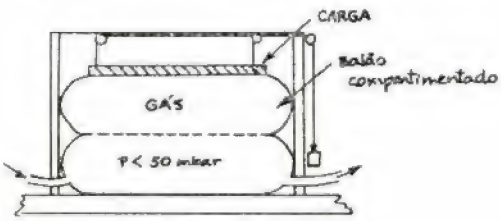


FIG. 32

Utilização de **balões para gás** [25]. Em construções do tipo **faça você mesmo** utilizam-se actualmente **câmaras de ar de camião** ligadas entre si

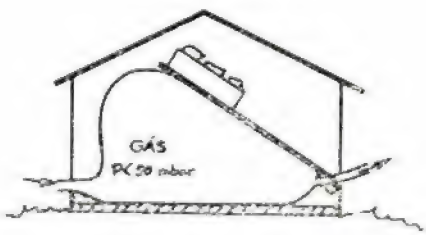


FIG. 33

Exemplo de utilização de um balão com uma câmara única [25]

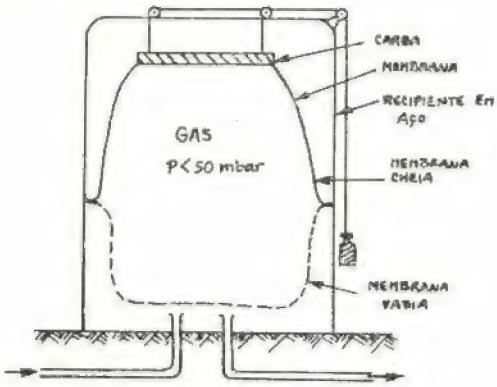


FIG. 34

Utilização de uma membrana elástica [25] para armazenamento do biogás

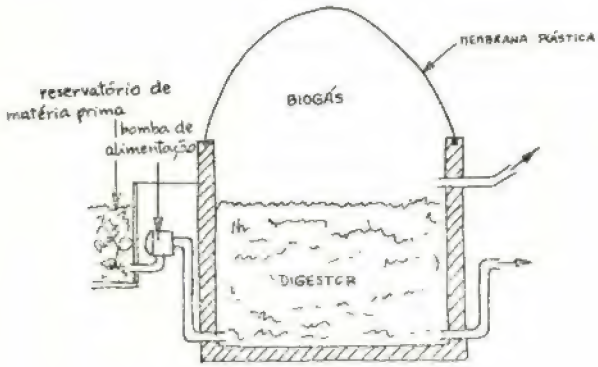


FIG. 35

Digestor com cobertura deformável, funcionando como reservatório para gás [25]

A solubilidade em hidrocarbonetos líquidos, sendo um processo que exige uma técnica altamente especializada e instalações de custo elevado não tem sido utilizada.

5 — O FERTILIZANTE

O resíduo sólido-líquido da digestão anaeróbia pode ser utilizado como fertilizante (adubo não-sintético). Efectivamente segundo a SEDE [27], os estrumes a utilizar como adubos deverão ter um índice C/N de 15/1 ou inferior. Ora os estrumes utilizados na digestão anaeróbia possuem em geral valores da ordem de 25 a 30/1, e o tratamento anaeróbio permite reduzir estes valores aos aconselhados para os adubos.

Segundo Buhr, H. O. et al. [28] o manual da WPCF (water pollution control federation) recomenda que, para a destruição dos organismos patogénicos eventualmente presentes, estes resíduos sejam tratados:

— termicamente durante uma hora a 57ºC; ou,
— secos à temperatura ambiente durante 12 a 15 meses.

Daí a vantagem da utilização de uma biomassa termófila dado que a residência (10 dias a 50ºC) das matérias no digestor é suficiente para a eliminação desses organismos patogénicos.

Todavia outros problemas poderão ser postos no que se refere à utilização destes resíduos como fertilizantes, nomeadamente:

— modificação do pH dos solos; e,
— modificação da textura dos terrenos.

Nestes domínios poucos estudos têm sido efectuados, não se tendo encontrado referências concludentes.

6 — CONCLUSÕES

Não se pretende com este artigo analisar exaustivamente toda uma vasta tecnologia em rápida expansão, mas apenas abordar descritivamente a arquitectura dos digestores e o processo da digestão anaeróbia. Pretendeu-se fornecer aos interessados neste domínio (metanogénese) uma bibliografia suficiente para iniciar os seus estudos, divulgando e experimentando se possível a construção de protótipos.

Realizou-se pois uma análise descritiva da tecnologia e processo da metanogénese. Analisamos em particular os aspectos quantitativo e qualitativo da caracterização das matérias-primas, a noção de biomassa e a arquitectura dos reactores biológicos. Fez-se também uma análise dos produtos da digestão anaeróbia, com particular incidência sobre as características e segurança no armazenamento do biogás.

7 — BIBLIOGRAFIA

[1] **Bryant, M. P.** — *Microbial Methane Production — Theoretical Aspects;* rapport: Univ. of Illinois — Urbana (1978).

[2] **Zeikus, J. G.** — *The Biology of Methanogenic Bacteria;* in Bacteriological Review, Vol. 41, 2, 514-541 (1977).

[3] **Pfeffer, J. T.** — *Anaerobic Digestion Processes;* in 1st Int. Symp. on An. Dig. (Cardiff — 1979).

[4] **Mc Inerney, M. J.; Bryant, M. P.** — *Metabolic Stages and Energetics of Microbial Anaerobic Digestion;* in 1st Int. Symp. on An. Dig. (Cardiff — 1979).

[5] **Zeikus, J. G.** — *Microbial Populations in Anaerobic Digesters;* in 1st Int. Symp. on An. Dig. (Cardiff — 1979).

[6] **Fry, L. J.** — *Methane — Generateurs a Gaz Methane;* ed. rougemont, le pâquier — Suisse (1977).

[7] **Anónimo** — *Compost, Fertilizer and Biogas Production for Human and Farm Wastes in the People's Republica of China;* IRDC — TS8e, ed. Michael G. Mc Garry (1978).

[8] **Scamell, W.** — *Anaerobic Treatment of Industrial Wastes;* in Process Biochemistry pp. 34-36, Oct. 1975.

[9] **Jennett, J. C.; Dennis, N. D.** — *Anaerobic Filter Treatment of Pharmaceutical Waste;* in J. WPCF 47, 1, 104 — 121 (1975).

[10] **Sanderson, J. E.** et al. — *Liquid Fuel Production From Biomass;* ref. Dynatech R/D Group (USA).

[11] *Anaerobic Digestion Research at Ssiro: Products Others than Biogas* (Austrália); in 1st Int. Symp. on Dig. An. (Cardiff — 1979).

[12] **Anónimo** — *Totem — Total Energy Module* — Fiat Auto Groupe; in 1st Int. Symp. on Dig. An. (Cardiff — 1979).

[13] **Andrews, J. F.; Graff, S. P.** — *Dynamic Modeling and Simulation of the Anaerobic Digestion Process.* Capítulo 8 de: Anaerobic Biological Treatment Process.

[14] **Bailey & Ollis** — *Biochemical Engineering Fundamentals;* ed. Mc Gran Hill (1977).

[15] **Andrews, J. F.** — *Control Strategies for the Anaerobic Digestion Processes;* in Water & Sewage Works (Março-Abril 1975).

[16] **Van Velsen, A. F. M.; Lettinga, G.** — *Effect of Feed Composition on Digester Performance;* in 1st Int. Symp. on Dig. An. (Cardiff — 1979).

[17] **Delafontaine, M. J.** et al. — *Fluorimetric Monitoring of Methanogenesis in Anaerobic Digestors;* submitted to Biotechnology Letters (1979).

[18] **Sinechal, X. J.; Installe, M. J.; Nyns, E. J.** — *Differentiation Between Acetate and Higher Volatile Acids in the Modeling of the Anaerobic Biomethanation Process;* submitted to Biotechnology Letters (1979).

[19] **Metcalf & Eddy, Inc.** — *Biological Unit Processes* — Chap. 10 — ed. Mc Graw Hill, Series in Water Resources and Env. Eng. (1972).

[20] **Lagrange, B.** — *Biomethane — Une Alternative Credible;* edisud/énergies alternatives (1979).

[21] **Zelter, S. Z.;** et al. — *Fermentation Methanique en Discontinu des Dechets Agricoles.* Inst. Nat. de la Recherche Agronomique (Paris, 1978).

[22] **Chiranyivi, C.** — *Design Analysis of Small-Scale Anaerobic Digesters in India;* in Energy from Biomass and Wastes (1978).

[23] **Cohen, A.;** et al. — *Anaerobic Digestion of Glucose With Separated Acid Production and Methane Formation;* in Water Research, Vol. 13, 571-580 (1979).

[24] **Wheatley, B. I.** — *The Gaseous Products of Anaerobic Digestionbiogas;* in 1st Int. Symp. on An. Dig. (Cardiff, 1979).

[25] **Dohne, E.** — *Biogas Storage and Utilization;* in 1st Int. Symp. on An. Dig. (Cardiff, 1979).

[26] **Mosey, F. E.** — *Sewage Treatment Using Anaerobic Digestion;* in 1st Int. Symp. on An. Dig. (Cardiff, 1979).

[27] **Anónimo** — *Le Potentiel Energetique Suisse du Gaz de Fumier;* «étude, 17» da SEDE, S. A. na «série de Publications de la Commission Fédérale de la conception globale de l'énergie» (Suíça, 1977).

[28] **Buhr, H. O.; Andrews, J. F.** — *The Termophilic Anaerobic Digestion Process Review Paper;* in Water Research, Vol. 11, 128-143 (1977).

[29] **Anónimo** — *Anaerobic Sludge Digestion;* capítulo do livro: *Wastewater Treatment Plant Design — A Manual of Practice;* ed. da WPCF e da ASCE (1977).

[30] **Nyns, E. J.** et al. — *Digesters — A Worldwide Review;* in 1st Int. Symp. on An. Dig. (Cardiff, 1979).

[31] **Anónimo** — *The Ball Digester;* in Newslatter Biogas, 3 (NEPAL — 1978).

[32] **Anónimo** — *China: Azolla Propagation and Small Scale Biogas Technology;* in FAO Soils Bulletin, 41 (Roma, 1979).

[33] **Horton, R.** — *The Implication of Engineering Design on Anaerobic Digester Systems;* in 1st Int. Symp. on An. Dig. (Cardiff, 1979).

[34] **Pyle, D. L.** — *Anaerobic Digester Design in the Third World;* in 1st Int. Symp. on An. Dig. (Cardiff, 1979).

[35] **Ducelier, G.; Sauze, M.** — *La Methane Biologique.* Colection CLEODE; extraits de «La France Viticole» (Nov. 1975 à Mars 1976).

[36] **Gosh, S.** et al. — *Anaerobic Acidogenesis of Wastewater Sludge;* in J. WPCF 47, 1, pp. 30-45 (1975).

[37] **Chian, E. S. K.** et al. — *Treatment of High Strenght Acidic Wastewater With a Completely Mixed Anaerobic Filter;* in Water Research 11, pp. 295-304 (1977).

[38] **Dewalle, F. B.** et al. — *Heavy Metal Removal With Completely Mixed Anaerobic Filter;* in J. WPCF 51, 1, pp. 26-36 (1979).

[39] **Heertjes, P. M.; Van der Meer, R. R.** — *Dynamics of Liquid Flow in an up Flow Reactor used for Anaerobic Treatment of Wastewater;* in Biotechnology and Bioengineering XX, pp. 1577-1594 (1978).

[40] **Fry, L. J.** — *Practical Building of Methane Power Plants for Rural Energy Independance;* ed. D. A. Knox (1974).

Anaerobic digestion control using the phase-plane analysis
(With application to methanogenesis)

SILVESTRE D. ANTUNES (*)
MICHEL J. INSTALLE (*)

RESUMO

Estuda-se neste artigo a utilização da análise no plano de fases no controlo da actividade biológica de digestores homogéneos, sem que se faça a lavagem da biomassa presente, ou se entre em «estado de choque».

ABSTRACT

Phase-plane analysis of homogeneous digester systems is used to give information on how to control the biological activity without washing out the reactor or reaching a «shock state».

0 — NOMENCLATURE (')

- A — biological activity (mg biomass . l^{-1} . d^{-1})
- A_g — biological generation activity (mg biomass . l^{-1})
- A_p — potencial biological generation activity of incoming nutrient (mg biomass . l^{-1})
- b — specific death rate (d^{-1})
- f — relative inflow of influent
- $f_i(L)$ — inhibition function for specific growth rate model (mg inhibitory . l^{-1})
- F — inflow of influent (and/or of effluent) in the digester (l . d^{-1})
- k_i — inhibition constant for biomass, expressed as potential biomass production (mg inhibitory . mg biomass . mg substrate^{-1} . l^{-1})
- k_S — saturation constant for biomass, expressed as potential biomass production (mg biomass . l^{-1})
- k_1 — retention coefficient for the substrate in the reactor ($k_1=0$, total retention)
- k_2 — fixation coefficient for the biomass in the reactor ($k_2=0$, total fixation)
- K_i — inhibition constant for biomass (mg inhibitory . l^{-1})
- K_S — saturation constant for biomass (mg substrate . l^{-1})
- l — substrate concentration, expressed as potential biomass production (mg biomass . l^{-1})
- L — substrate concentration (mg substrate . l^{-1})
- R_B^C — net transformation rate of B into C by biological activity (mg C . mg B^{-1})
- S — active biomass concentration (mg biomass . l^{-1})
- t — time (d)
- V_D — reactor liquid volume (l)
- Y_B^C — yield coefficient for the transformation of B into C by biological activity (mg C . mg B^{-1} . l . d)
- ε — relative growth rate for biomass
- μ — specific growth rate for biomass (d^{-1})
- $\hat{\mu}$ — maximum specific growth rate for biomass (d^{-1})
- τ — relative time, generation.

1 — INTRODUCTION

The anaerobic digestion process has been modelled in 1972 by Graef, S. P. **[1]** considering one bacterial population in the biological phase. Later on, in 1977 Hill, D. T. and Barth, C. L. **[2]** considered two types of populations with differenciated functions. Actually Bryant, M. P. **[3]**, Pfeffer, J. T. **[4]** and Zeikus, J. T. **[5]** are considering the existence of others types of populations, for which parameters are not yet available.

In this paper, we investigate on the evolution of homogeneous population in the phase-plane. This research is applied to the study of the dynamics of the acid-formers and the methane-formers considered by Hill, D. T. and Barth, C. L. **[2]**.

(*) Université Catholique de Louvain. — Lab. d'Automatique et Analyse de Systèmes.
Bâtiment Maxwell — Place du Levant — 1348 — Louvain-la-Neuve — Bélgique.

(') For simplification of the notations, the argument **time** will be omitted for variables depending on time.

Manuscrito recebido para publicação em 4/1/80.

2 — HYPOTHESES

Let us consider an anaerobic digester (biological reactor-figure 1) for which the characteristics of influent, effluent and reactor are assumed to be:

— INFLUENT:

the influent in liquid phase (homogeneous) is introduced in the reactor at a rate F, with concentrations:

L_o in substrate, and

S_o in active population (we will consider later $S_o = 0$).

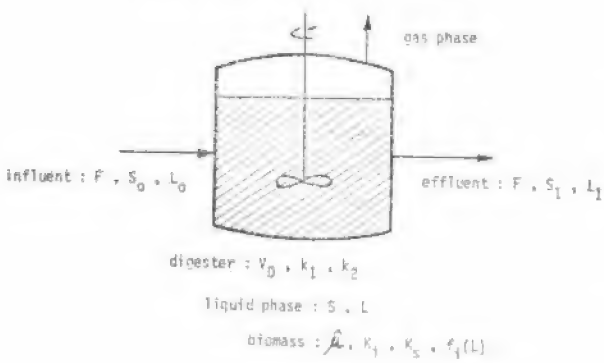


FIGURE 1

Anaerobic digester

— DIGESTER:

the liquid phase in the digester has a volume V_D, and its mean (') concentrations in substrate and active population are respectively: L and S.

The digester geometry and heterogeneity are characterised by two coefficients k_1 and k_2, retention coefficient for the substrate and fixation coefficient for the active population.

The active biological phase is characterised by:

— the specific growth rate μ, defined as in the Haldane-Monod model **[6]**, augmented with one inhibition function $f_i(L)$:

$$\mu = \frac{\hat{\mu}}{1 + K_S/L + f_i(L)/K_i} \qquad (2.1)$$

— the specific death rate b, considered as constant;

— the biological activity, defined as:

$$A = \mu \,.\, S \qquad (2.2)$$

— the yield coefficients for the transformation of one product B into C by biological activity: Y_B^C, so that the net transformation rate of B into C, is defined by:

$$R_B^C = Y_B^C \,.\, A \qquad (2.3)$$

— EFFLUENT:

the effluent in liquid phase (homogeneous) leaves the reactor at the rate F, and has concentrations:

in substrate: $L_1 = k_1 \,.\, L$ (2.4)

in active biomass: $S_1 = k_2 \,.\, S$ (2.5)

We neglect the gas phase in the model as it may be considered as a function of the biological activity, and it does not introduce an important change in the volume of the liquid phase. Graef, S. P. **[1]** Hill, D. T. and Barth, C. L. **[2]** and others considered that the yield coefficients for gas production from biological activity are constants. So biological activity is enough to define gas production.

3 — PROCESS DYNAMICS

The process dynamics is described by the balance equations for substrate utilisation and population dynamics for biomass:

substrate utilisation:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{F}{V_D}(L_o - k_1 \,.\, L) - \frac{1}{Y_s^a}\mu \,.\, S$$

population dynamics: (3.1)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{F}{V_D}(S_o - k_2 \,.\, S) + (\mu - b)\, S$$

Let us consider:

$\varepsilon = \dfrac{\mu}{b}$ = relative growth rate for biomass (3.2)

$l = Y_s^a \,.\, L$ = substrate concentration, expressed as potential biomass production (3.3)

$k_s = Y_s^a \,.\, K_s$ (3.4)

$k_i = Y_s^a \,.\, K_i$ (3.5)

$\tau = b \,.\, t$ = relative time (3.6)

$f = \dfrac{F}{b \,.\, V_D}$ = relative inflow of influent (3.7)

(') Spatial average.

Then 3.1 may be written:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dl}{d\tau} = f \,.\, (l_o - k_1 \,.\, l) - \varepsilon \,.\, S \\[2ex] \dfrac{dS}{d\tau} = f \,.\, S_o + (\varepsilon - 1 - k_2 \,.\, f) \,.\, S \end{array}\right. \tag{3.8}$$

And we may define biological generation activity as:

$$A_g = \varepsilon \,.\, S \tag{3.9}$$

The incoming nutrient introduces a potential biological generation activity, defined by:

$$A_p = (l_i - k_1 \,.\, l) \,.\, f \tag{3.10}$$

we can neglect (if the digester is working well) the term for the effluent, so in a first approach we can say that the nutrient inflow introduces a potential biological generation activity:

$$A_p \approx l_i \,.\, f \tag{3.11}$$

As usual we do not introduce biomass with the influent ($S_0 = 0$) and we can write 3.8 as:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dl}{d\tau} = f\,(l_0 - k_1 \,.\, l) - \varepsilon \,.\, S \\[2ex] \dfrac{dS}{d\tau} = (\varepsilon - 1 - k_2 \,.\, f) \,.\, S \end{array}\right. \tag{3.12}$$

4 — PHASE-PLANE ANALYSIS

4.1 — Phase-Plane: l-S

The state of the process may be described by the state variables: concentration in substrate (l) and biomass concentration (S) in the digester.

Hence we may represent the evolution of the state of the system in the plane l-S (phase-plane, see figure 2).

Two cases are considered in our work depending on the type of inhibiting function $f_i(L)$:

1st — no inhibition by the substrate:

$$f_i(L) = c \text{ (constant)} \tag{4.1.1}$$

with c independant of L (see figure 3).

2nd — inhibition by the substrate:

$$f_i(L) = L \tag{4.1.2}$$

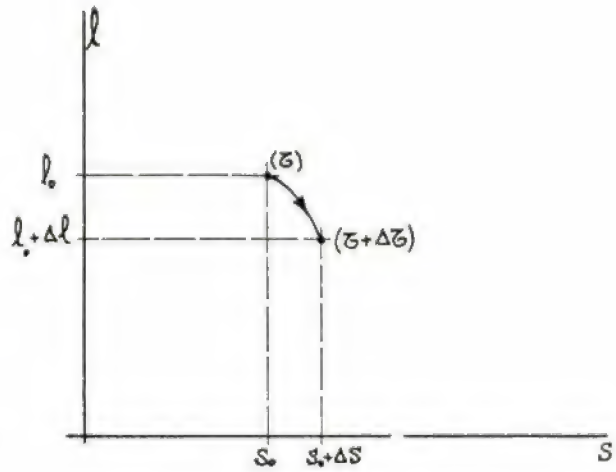


FIGURE 2

Phase-plane evolution curve

In this case, the substrate or a linear function of it (for example the non-ionized substrate at constant pH,...) acts as an inhibiting agent for the biomass growth (see figure 3).

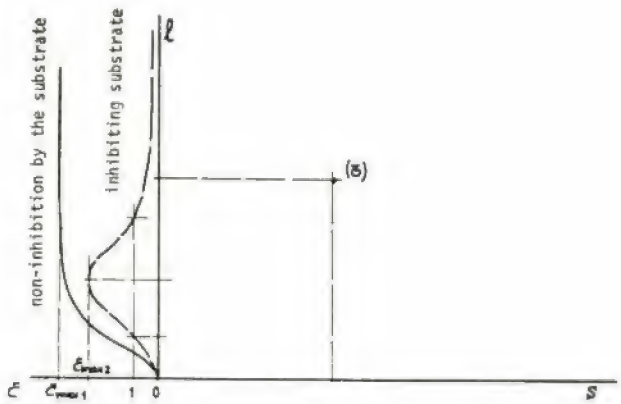


FIGURE 3

Phase-plane supplied with relative growth coefficient for biomass

Supplying (as shown in figure 3) the phase-plane with the relative growth coefficient for biomass will give us some suplementary information on population dynamics for free systems as we shall see in § 4.3.

4.2 — Equal activity curves

We may consider equal activity curves and represent them in the phase-plane: l-S.

From 3.9, 3.2 and 2.1 we have:

$$A_g = \frac{\hat{\varepsilon} \,.\, S}{1 + k_s/l + f_i(L)/K_i} \tag{4.2.1}$$

If the inhibition function is known, it is possible to compute l(S) with A_g kept constant.

4.3 — Free system dynamics

Let us consider a batch system, that is a not fed system. Hence:

$$f = 0 \tag{4.3.1}$$

then the system dynamics 3.12 becomes:

$$\frac{dl}{d\tau} = -\varepsilon \cdot S$$
$$\frac{dS}{d\tau} = (\varepsilon - 1) \cdot S \tag{4.3.2}$$

and we can see that in the phase-plane the trajectory for the free system evolution is such that:

$$\frac{dl}{dS} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \tag{4.3.3}$$

It is easy to show that 4.3.3 consists in a family of parallel curves in the phase-plane, generated by horizontal translation (see figures 4 and 5).

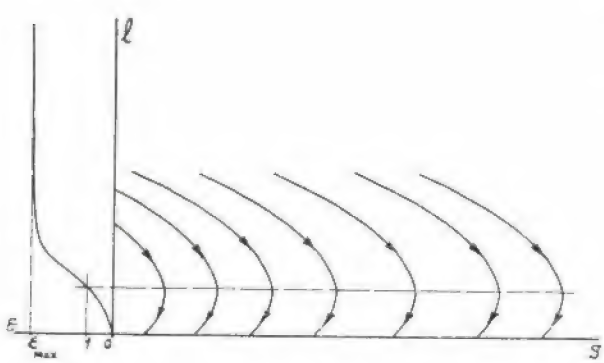


FIGURE 4

Free system dynamics for a population with no inhibition by the substrate

Note that the evolution of the biomass concentration depends on the relative growth coefficient:

— for $\varepsilon > 1$ the biomass concentration increases with time,

— for $\varepsilon < 1$ the biomass concentration decreases with time.

The maximum of the generation activity occurs also at the maximum of the relative growth coefficient for a certain biomass concentration, so substrate concentrations greater than those giving maximum relative growth coefficient should be avoided, as they result in lower activity systems (by inhibition), see figures 6 and 7.

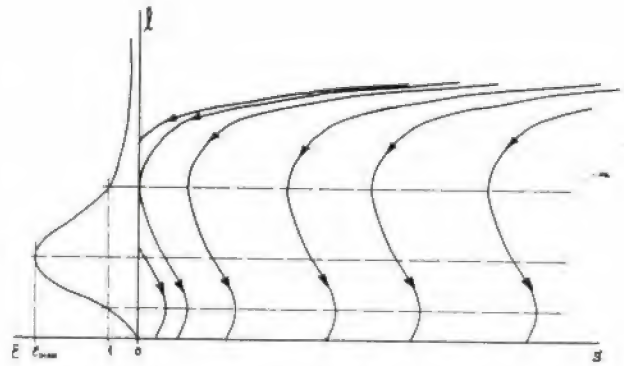


FIGURE 5

Free system dynamics for a population with inhibition by the substrate

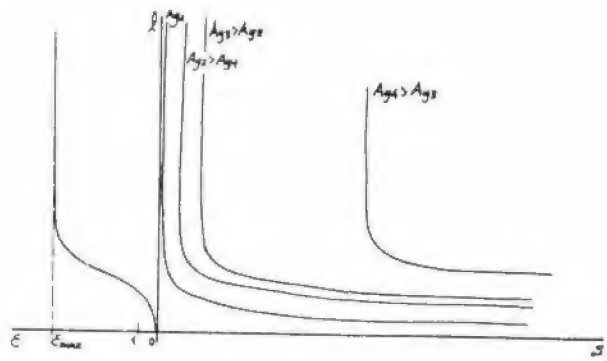


FIGURE 6

Equal generation activity curves for a population with no inhibition by the substrate (there are no limit to substrate concentration)

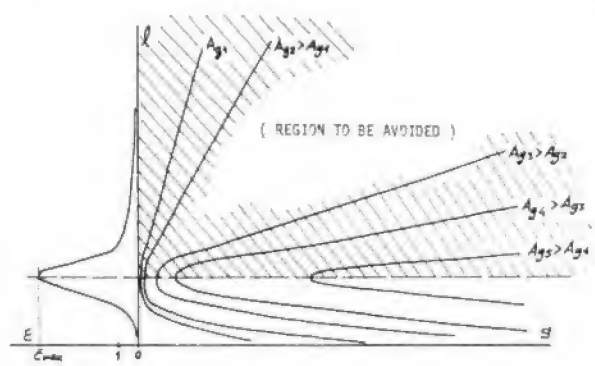


FIGURE 7

Equal generation activity curves for a population with inhibition by substrate

4.4 — Forced system dynamics

Constant and periodic feed-rates have been studied and we find that if there exists active biomass in the reactor, the state of the reactor will tend towards a stationary value, which depends on two limiting conditions for influent:

— one feed-rate condition — limiting the value of the feed-rate to a maximum, depending on the inhibiting func-

tion (QUANTITY CONDITION FOR THE EFLUENT). So, if there are no substrate inhibition (inhibiting function of type 4.1.1), we have:

$$f \leqslant \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{k_i + Y_s^a \cdot c} - 1 \right) \Big/ k_2 \qquad (4.4.1)$$

and, if there are inhibition by the substrate (inhibiting function of type 4.1.2), we have:

$$f \leqslant \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{1 + 2\sqrt{k_s/k_i}} - 1 \right) \Big/ k_2 \qquad (4.4.2)$$

— one substrate condition — limiting the substrate concentration of the influent to a minimum value (QUALITY CONDITION FOR THE INFLUENT) depending on the inhibiting function. So, if there are no substrate inhibition, we have:

$$I_o \geqslant \frac{k_i \cdot k_s (1 + k_2 \cdot f)}{\hat{\varepsilon} \cdot k_i - (1 + k_2 \cdot f) \cdot (k_i + Y_s^a \cdot c)} \qquad (4.4.3)$$

and if there are inhibition by the substrate:

$$I_o \geqslant \frac{k_s \cdot k_i}{2} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{1 + k_2 \cdot f} - 1 \right) \left[1 - \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{k_s}{k_i} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{1 + k_2 \cdot f} - 1 \right)^{-2}} \right] \qquad (4.4.4)$$

and on the initial state of the reactor.

If these two limiting conditions for the influent are verified, depending on the initial state of the reactor:

— a stable node (N) for the working digester may be found; or,

— an other stable node (WO) for the non-working digester (by ***washing out*** the biomass) may be found (see figure 8).

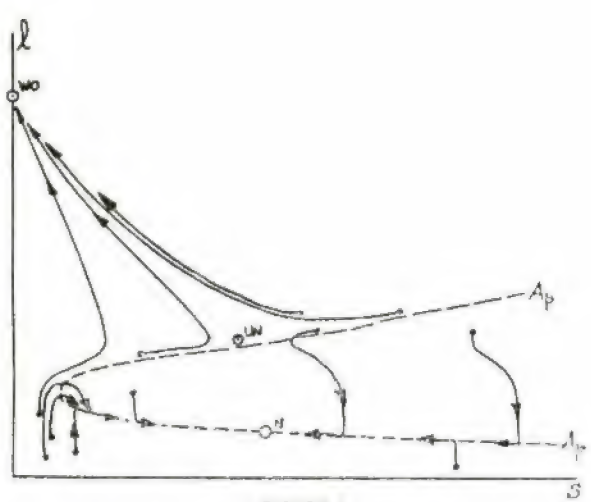


FIGURE 8

Trajectory evolution in the phase-plane of a forced system (influent potential biological generation activity: A_p constant) for different initial state of the reactor

If one of the limiting conditions for the influent is not verified the biomass will be washed out, the digester will not work, and the stable node (WO) of ***washing out*** will be found.

For a fixed initial state of the digester ($S = S_{UN}$ and $I = I_{UN}$), there exists one unstable node (UN), but any small perturbation will move its state to one of the stable nodes: the working one (N) or the non-working (WO).

Furthermore, given a certain initial state for the digester, transient trajectories to a stationary state have been studied and table I summarises the conditions for the forced or free evolution.

5 — APPLICATIONS TO METHANOGENESIS

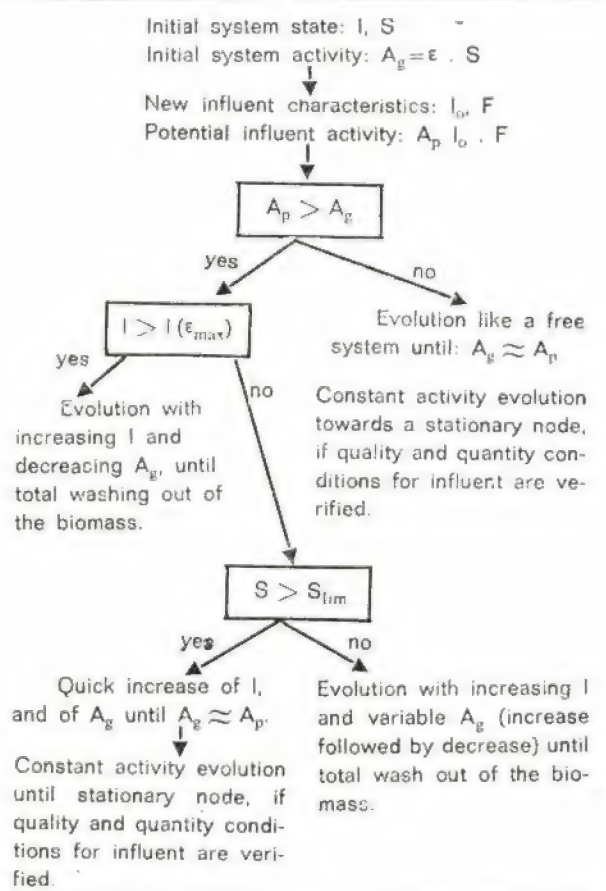
5.1 — Acid-formers reactor

Using Hill, D. T. and Barth, C. L. **[2]** parameters for acid-formers, a simulation of an acid-former reactor has been implemented on a PDP 11/20 computer. The results are shown in figures 9, 10 and 11.

Figure 9, represents the free system dynamics and equal activity curves for acid-formers, considering constant inhibition, independant of substrate concentration.

TABLE I

Typical scheme of evolution after influent change



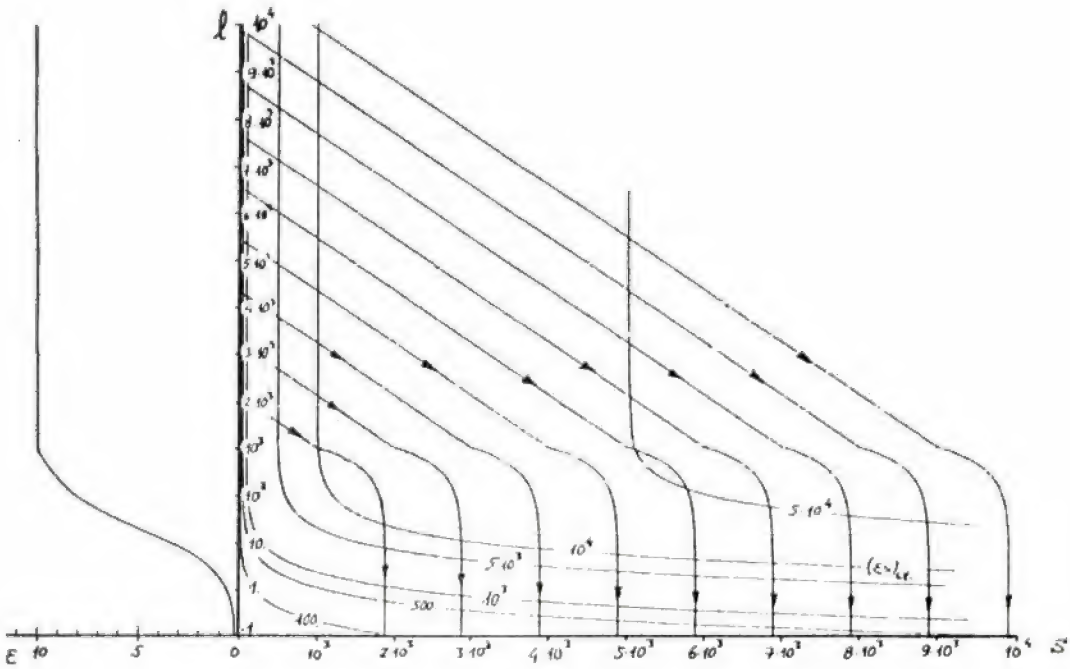


FIGURE 9

Phase-plane for acid-formers reactor: free system dynamics (*)

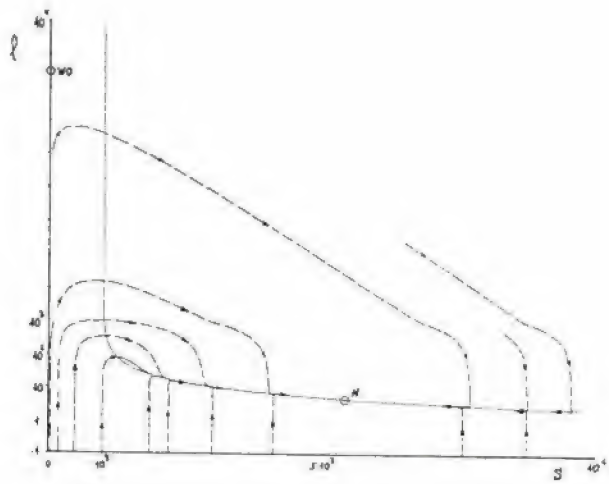


FIGURE 10

Phase-plane for acid-formers reactor: constant feed of influent

Figure 10 represents the forced system evolution, in the case of a constant feed rate of influent, and we can see that:

— there are no unstable node, and,

— the *washing out* node can only be obtained if we start with a system without active biomass.

Figure 11 represents the forced system evolution in the case of a periodic feed rate of influent, and we can see that:

— trajectories oscilate around mean values that are almost similar to these obtained with a constant feed-rate of influent (see figure 10), and,

— a stationary state are the stable node (N) may be find as it was the case for a constant feed-rate of the influent.

(*) Note that, for low substrate concentrations, the "l" scale becomes logarithmic.

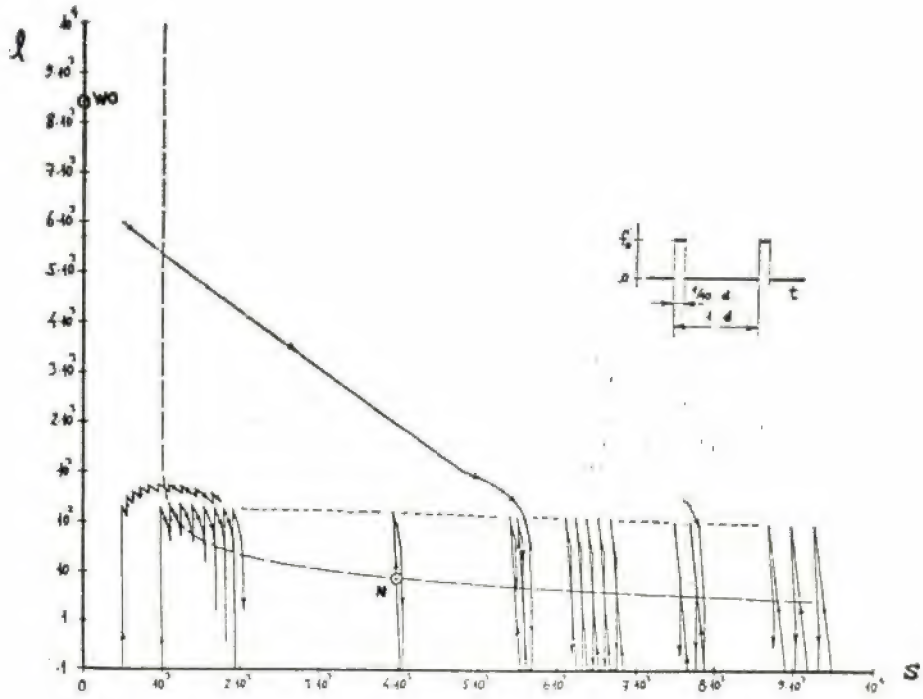


FIGURE 11

Phase-plane for acid-formers reactor: periodic feed of influent

5.2 — Methane-formers reactor

As in § 5.1 the same types of curves have been made for a methane-formers reactor, and they are represented in figures 12, 13 and 14 respectively.

As in the case of acid-formers, we can see (figure 14) that a periodic feed-rate of the influent gives:

— mean-time trajectories of the same type from that of constant feed of influent (figure 13), and,

— a stationary state around the stable node (N) may be find.

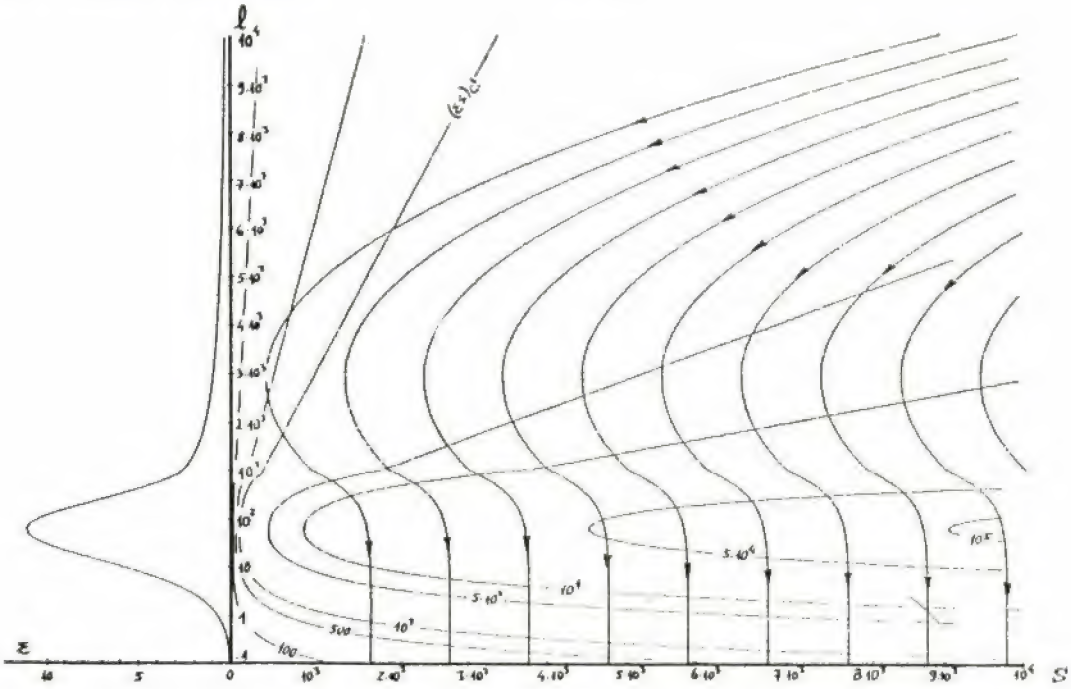


FIGURE 12

Phase-plane for methane-formers reactor: free system dynamics

However, for constant feed-rate of the influent there exists an unstable node (UN), and a ***washing out*** condition may occur which is essentialy depending on the substrate concentration.

We can see that a certain biomass concentration gives us the maximum of biological activity at the maximum relative growth coefficient, and this corresponds to a well defined value for the substrate concentration.

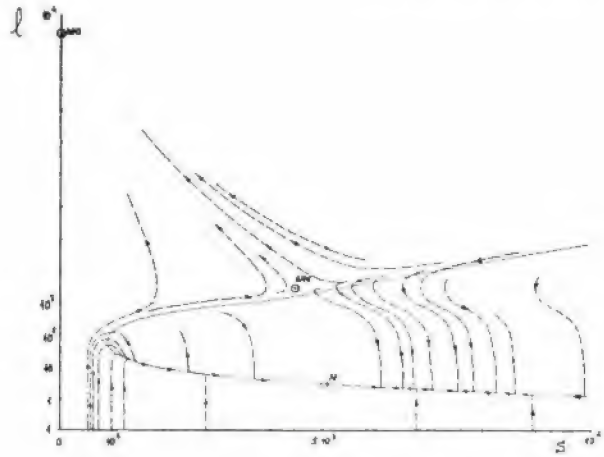


FIGURE 13

Phase-plane for methane-formers reactor: constant feed of influent

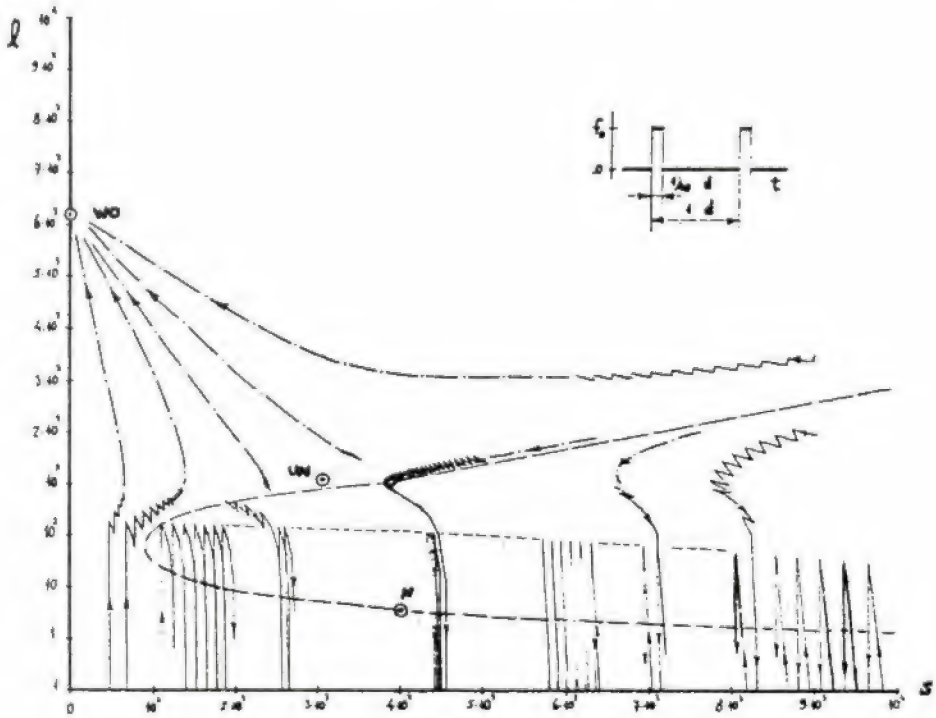


FIGURE 14

Phase-plane for methane-formers reactor: periodic feed of influent

6 — CONCLUSIONS

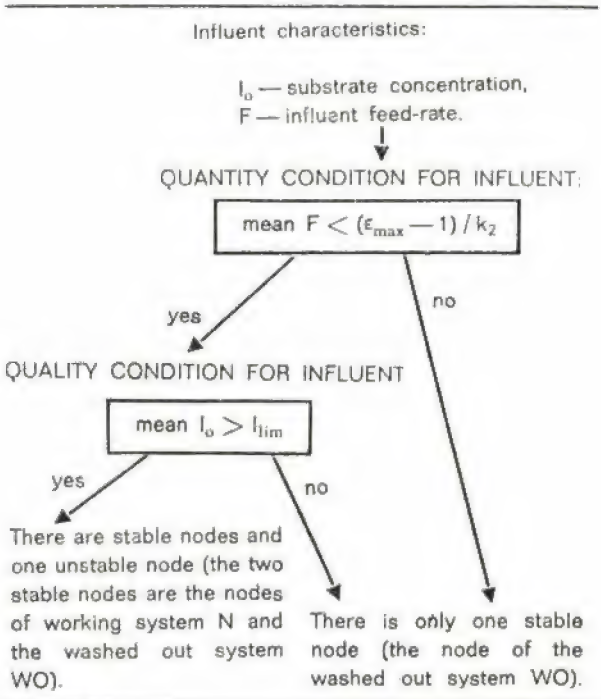
To model a digester with only two state-variables: the biomass and the substrate concentration in the reactor is not possible. However in a well working digester and assuming that all the variables are constant, the phase--plane method may give us the necessary insight to improve and to control the dynamics of the biological activity.

Furthermore, changing the feed-rate or characteristics of the influent will change the stationnary state of the digester (table I summarises the evolution in this case).

Quality and quantity characteristics of the influent (l_0 and F) define the stable and unstable nodes in the phase-plane and table II summarises the conditions for nodes existence.

TABLE II

Stable and unstable nodes for forced stationary regime



7 — BIBLIOGRAPHY

[1] **Graef, S. P.** — *Dynamics and control strategies for the anaerobic digester.* Ph D dissertation at Clemson Univ. (1972).

[2] **Hill, D. T.; Barth, C. L.** — *A dynamic model for simulation of animal waste digestion.* J. W. P. C. F. pp. 2129-2143 (1977).

[3] **Mc Inerney, M. J.; Bryant, M. P.** — *Metabolic stages and energetics of microbial anaerobic digestion.* 1st Int. Symp. on Anaerobic Digestion (Cardiff — 1979).

[4] **Pfeffer, J. T.** — *Anaerobic digestion processes.* 1st Int. Symp. on Anaerobic Digestion (Cardiff — 1979).

[5] **Zeikus, J. G.** — *Microbial populations in anaerobic digesters.* 1st Int. Symp. on Anaerobic Digestion (Cardiff — 1979).

[6] **Vavilin, V. A.; Vasilyev, V. B.** — *Mathematical models of biological waste treatment processes for the design of aeration tanks.* Water Res. 12, pp. 491-501 (1978).

NOTICIÁRIO

4.° ENCONTRO ANUAL DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE QUÍMICA

Investigação, Indústria, Ensino, Material Bibliográfico, Científico e Didáctico — Abril 1981 — Lisboa

Comissão Coordenadora

A. ROMÃO DIAS (Secretário Geral da SPQ)
J. A. MARTINHO SIMÕES (Secretário Executivo) do 4.° Encontro)

FRANCISCO PEDROSO (Tesoureiro do 4.° Encontro)
MARIA ALZIRA A. FERREIRA (Região Sul)
CORREIA CARDOSO (Região Centro)
JOSÉ LUÍS DA COSTA LIMA (Região Norte)

Organização Geral

O Encontro terá a duração de uma semana e será dividido em 3 blocos consecutivos: investigação, indústria e educação.

Os interessados podem inscrever-se em um ou maisblocos.

Bloco Investigação (3 DIAS)

6 Lições Plenárias.
8 Comunicações convidadas.
Todas as outras comunicações serão apresentadas como cartazes.

Bloco Indústria (1 DIA)

Haverá lições plenárias, comunicações e discussão sobre temas como análise química na indústria, poluição, integração europeia, etc.

(Continua na pág. 402)

M
a "via"
mais rápida
no domínio dos
transportes
urbanos
METROPOLITANO DE LISBOA

Corporation financing under falling share prices

by F. CALDEIRA SARAIVA (*)

ABSTRACT

The present paper is an application of control techniques to the determination of the optimal financial policy, for a firm whose shares' market value falls with increasing leverage. By the application of Pontryagin's principle in continuous time the optimal dynamic policies are derived as funtions of the values of the parameters and the results are discussed.

RESUMO

O presente artigo é uma aplicação de técnicas de controlo à determinação da poltica óptima de financiamento para firmas cujas acções tem valores de mercado decrescentes com a taxa de endividamento. Por aplicação do Princípio de Pontryagin em tempo contínuo as politicas dinâmicas óptimas são obtidas como funções dos valores dos parâmetros, sendo os resultados finais discutidos.

1 — INTRODUCTION

In Caldeira-Saraiva (1979), we presented a model to study the influence of the fall in share prices with leverage on the choice of an optimal gearing policy. We assumed that both the rate of fall of share prices and the maximum amount a firm could borrow per unit time were small, and we studied the resulting model using control techniques. In the present paper, we wish to lift the restrictions imposed on the rate of fall of share prices and the rate of issue of bonds. We shall use the same model as previously, which we shall now proceed to present summarily. For more details, see Caldeira-Saraiva (1979).

2 — THE MODEL

The total capital of the firm is K(t) and the book value of outstanding debt B(t). Thus the value of equity is

$$E(t) = K(t) - B(t)$$

the gearing ratio being

$$g(t) = \frac{B(t)}{E(t)}$$

If the gross rate of profit is R, the rate of interest r, and the tax rate $(1-\theta)$ (all constants), the rate of accumulation of profits is

$$\theta\ [R\ K - r\ B]$$

of which a percentage

$$\gamma \in [0,1] \tag{1}$$

will be paid out as dividends. If the firm issues shares through underwriters, we shall suppose the rate of issue is at maximum a given multiple of the going rate of profits, i.e.

$$\text{rate of issue} = n\ [R\ K - r\ B]$$

with

$$0 \leqslant n \leqslant N \tag{2}$$

and that a percentage, proportional to gearing, is charged by the underwriters to cover their risks.

The proceedings of the issue for the firm are then

$$(1-\alpha\, g)\ n\ [R\ K - r\ B]$$

and the rate of increase of the equity will be

$$\frac{dE}{dt} = [(1-\gamma)\ \theta + (1-\alpha\, g)\ n]\ [R(E+B) - r\ B] \tag{3}$$

The firm can also obtain finance by borrowing. The amount of new bonds a firm can issue per unit time will, similarly to shares, be at most a certain number of times U, the going rate of profits, i.e.

$$\frac{dB}{dt} = b\ [R(E+B) - r\ B] \tag{4}$$

---

* Professor do Instituto Superior Técnico.

Manuscrito recebido para publicação em 16/7/80.

with $b \leqslant U$. The firm can also repurchase bonds out of its retained earnings and the proceedings of the sale of new shares, so

$$U \geqslant b \geqslant -[(1-\gamma)\theta + (1-\alpha g) n] \qquad (5)$$

The objective of the firm is the maximization of the owner's discounted receipts:

$$V(o) = \int_o^T \tau(d(t) - d_e(t))\, e^{-kt}\, dt + [E(T) - E_e(T)]\, e^{-kT}$$

where d(t) is the dividend at time t, τ the (supposedly constant) income tax rate for shareholders and $d_e(t)$ and $E_e(t)$ represent respectively the dividends and equity of new owners (owners different from the owners at time t). Adopting the procedure introduced by Krouse (1972) and followed e.g. in Krouse (1973), Krouse and Lee (1973), Senchak (1975), Perrakis (1976) etc... we can equate the discounted value of shares placed with underwriters with the discounted value of dividends and final equity. The objective then becomes:

$$V(o) = \int_o^T (\tau\gamma\theta - n)\,[R(E+B) - r\,B]\, e^{-kt}\, dt + E(T)\, e^{-kT} \qquad (6)$$

which we want to maximize, subject to the restrictions on the control variables (1), (2) and (5), the development laws of the state variables (3) and (4) and the restriction

$$B \geqslant 0 \qquad (7)$$

3 — SYNTHESIS OF OPTIMAL SOLUTIONS

Taking adjoint variables $\psi_E = \varphi_E\, e^{-kt}$ and $\psi_B = \varphi_B\, e^{-kt}$, and a shadow variable $\lambda_B\, e^{-kt}$ for restriction (7) the Hamiltonian of the system is

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = {} & [\tau\gamma\theta - n]\,[R(E+B) - r\,B]\, e^{-kt} + \\ & + (\varphi_E\, e^{-kt})\,[(1-\gamma)\theta + (1-\alpha g) n]\,[R(E+B) - r\,B] + \\ & + (\varphi_B\, e^{-kt})\, b\,[R(E+B) - r\,B] + (\lambda_B\, e^{-kt})\, B\end{aligned}$$

Putting $H = \mathcal{H}\, e^{-kt}$ and representing by $\overset{\circ}{X}$ the derivative of variable X with respect to $\sigma = T - t$ (backwards time), the equations of the system become

$$\overset{\circ}{g} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{B}{E}\right) = \{[(1-\gamma)\theta + (1-\alpha g) n]\, g - b\}\,[R + (R-r) g] \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varphi}_E + k\,\varphi_E = e^{kt}\left(-\frac{d\,\psi_e}{d\,t}\right) = e^{kt}\,\frac{\partial\,\mathcal{H}}{\partial\,E} = \frac{\partial\,H}{\partial\,E} \\ = (\tau\gamma\theta - n)\,R + \varphi_E\{[(1-\gamma)\theta + (1-\alpha g) n]\,R + \\ + \alpha\, n\, g\,[R + (R-r) g]\} + \\ + \varphi_B\left\{bR - [R + (R-r) g]\, g\,\frac{d\,b}{d\,g}\right\}\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varphi}_B + k\,\varphi_B = \frac{\partial\,H}{\partial\,B} = (\tau\gamma\theta - n)\,(R-r) + \varphi_E\,\{[(1-\gamma)\theta + \\ + (1-\alpha g) n]\,(R-r) - \alpha\, n\,[R + (R-r) g]\} + \\ + \varphi_B\left\{b(R-r) + [R + (R-r) g]\,\frac{d\,b}{d\,g}\right\} + \lambda_B\end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{v} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{V}{E}\right) = (\tau\gamma\theta - n)\,[R + (R-r) g] + \\ + \{[(1-\gamma)\theta + (1-\alpha g) n]\,[R + (R-r) g] - k\}\, v\end{aligned} \qquad (11)$$

where γ, n and b are chosen to maximize

$$\begin{aligned}H = {} & \theta\,[R(E+B) - r\,B]\,\varphi_E + \lambda_B\, B + \\ & + [R\,(E+B) - r\,B]\,\{\gamma\,(\tau - \varphi_E) + n\,[(1-\alpha g)\,\varphi_E - 1] + \\ & + b\,\varphi_B\}\end{aligned}$$

or

$$H = \hat{H} + [R(E+B) - r\,B]\,\{\gamma\, S_\gamma + n\, S_n + b\, S_b\} \qquad (12)$$

where $\hat{H}$ is independent of the control variables and

$$S_\gamma = \tau - \varphi_E$$
$$S_n = (1-\alpha g)\,\varphi_E - 1$$
$$S_b = \varphi_B$$

when $\sigma = 0$, φ_E is one and φ_B is zero by the transversality condition, so

$$S_\gamma = \tau - 1$$
$$S_n = -\alpha\, g_o$$
$$S_b = 0$$

The income tax rate τ can only be less or equal to 1. If $\tau < 1$ then $S_\gamma < 0$ If $\tau = 1$ then $S_\gamma = 0$ but from (9)

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{S}_\gamma(0) &= -\overset{\circ}{\varphi}_E(0) \\ &= -(\theta\, R - k) - \alpha\, n\, g\,[R + (R-r) g]\end{aligned}$$

And, as by hypothesis $\theta\, R > k$, (or else the business after taxes would not be worthwhile) it follows that $S_\gamma(0^+) < 0$. So, in any case the optimal policy for dividends is $\hat{\gamma} = 0$.

If $g_o > 0$ then $S_n(0)$ will be negative so the optimal n will be zero; $S_b(0)$ but $\overset{\circ}{S}_b = \theta\,(R-r)$, so $S_b(0^+) > 0$ and therefore, the optimal b is $\hat{b} = U$.

If $g_o = 0$ then $S_n = S_b = 0$ and

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{S}_n &= -\alpha\,\overset{\circ}{g}\,\varphi_E + (1-\alpha\,\overset{\circ}{g})\,\varphi_E \\ &= -\alpha\,\overset{\circ}{g} + \overset{\circ}{\varphi}_E \\ &= \alpha\, b\, R + (\theta\, R - k)\end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{S}_b = \theta\,(R-r) - \alpha\, n\, R + \lambda_B$$

Let us first suppose that

$$\theta(R-r)-\alpha\ N\ R>0$$

Then S_b will be positive, so at $\sigma=0^+$ we shall have $\mathring{S}_b>0$ and thus $b=U$. It follows then that $\mathring{g}(0)=-UR$ and thus at $\sigma=0^+$, $g<0$ thus violating constraint (7). So, there can be no backward trajectories starting at $g_o=0$, i.e. all real-time trajectories end with $g_o>0$ and controls at $\hat{\gamma}=0$, $\hat{n}=0$ and $\hat{b}=U$. Equations (8), (9) and (10) yield

$$\mathring{g}=(\theta\ g-U)\ [R+(R-r)\ g] \tag{13}$$

$$\mathring{\varphi}_E=(\theta\ R-k)\ \varphi_E+U\ R\ \varphi_B \tag{14}$$

$$\mathring{\varphi}_B=\theta(R-r)\ \varphi_E+[U(R-r)-k]\ \varphi_B \tag{15}$$

and, integrating

$$g=\frac{U[R+(R-r)\ g_o]+R\ (\theta\ g_o-U)\ e^{[\theta\ R+U(R-r)]\sigma}}{\theta[R+(R-r)\ g_o]-(R-r)\ (\theta\ g_o-U)\ e^{[\theta\ R+U(R-r)]\sigma}} \tag{16}$$

$$\varphi_E=\frac{\theta\ R\ e^{[\theta\ R+U(R-r)]\sigma}+U(R-r)}{\theta\ R+U\ (R-r)}\ e^{-k\sigma} \tag{17}$$

$$\varphi_B=\frac{\theta\ (R-r)}{\theta\ R+U\ (R-r)}\ \{e^{[\theta\ R+U(R-r)]\sigma}-1\}\ e^{-k\sigma} \tag{18}$$

From equations (17) and (18) we see that φ_E and φ_B will remain positive. Therefore, from (14) it follows that $\mathring{\varphi}_E$ will be positive and so φ_E will remain above τ and there will be no switch in γ. As $S_b=\varphi_B$, there can also be no switch in b. The only switch that can thus occur is if $S_n=(1-\alpha\ g)\ \varphi_E-1$ changes sign. This will happen for a value of g equal to

$$g_{sw}=\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\varphi_E}\right) \tag{19}$$

The adjoint variable φ_E is, as we said above, a function of σ which takes the value 1 at $\sigma=0$ and increases to ∞ as $\sigma\to\infty$. Thus $g_{sw}(\sigma)$ is a function taking the value 0 for $\sigma=0$ and increasing to $1/\alpha$ as $\sigma\to\infty$.

In Caldeira-Saraiva (1979) we studied thoroughly the case when $1/\alpha>U/\theta$ which is obtained for small values of both α and U. We shall now, as said in the beginning, concern ourselves with the case $1/\alpha<U/\theta$.

If $g_o>U/\theta$ then, we see from (13) that g will increase. It will therefore be always greater than U/θ, thus greater than $1/\alpha$ and a fortiori greater than g_{sw} for the same σ. Thus there will be no switches. The same will happen if $g_o=U/\theta$. If $g_o<U/\theta$ then g will decrease tending to zero in a finite time. The descending patch will therefore cross the rising switching curve g_{sw} and there will be a switch in control from $\hat{n}=0$ to $\hat{n}=N$. The system will then evolve under:

$$\mathring{g}=\{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ g-U\}\ [R+(R-r)\ g] \tag{20}$$

$$\mathring{\varphi}_E=-NR+\{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ R+\alpha N g\ [R+ +(R-r)\ g]-k\}\ \varphi_E+UR\ \varphi_B \tag{21}$$

$$\mathring{\varphi}_B=-N(R-r)+\{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ (R-r)-\alpha\ N[R+ +(R-r)g]\}\ \varphi_E+[U(R-r)-k]\ \varphi_B \tag{22}$$

Equation (20) can also be written as

$$\mathring{g}=[R+(R-r)\ g]\ [-N\ \alpha\ g^2+(\theta+N)\ g-U] \tag{23}$$

The second degree polynomial has roots

$$\hat{g}_{1,2}=\frac{\theta+N\pm\sqrt{(\theta+N)^2-4\ \alpha\ UN}}{2\ \alpha\ N}$$

Whether these roots are complex or real depends on whether the discriminant

$$(\theta+N)^2-4\ \alpha\ UN \tag{24}$$

is negative or not. This discriminant is itself a second degree polynomial in N of discriminant $\Delta=16\ \alpha^2\ \theta\ U\ (U/\theta-1/\alpha)$ As we are assuming that $U/\theta>1/\alpha$, Δ is always positive and therefore (24) has always two real roots. Let them be N_1 and N_2. Writing (24) as

$$N^2-2\ \alpha\ \theta\left[2\ \frac{U}{\theta}-\frac{1}{\alpha}\right]N+\theta^2$$

shows us that N_1+N_2 and N_1N_2 are positive, so N_1 and N_2 will both be positive and we can assume, without loss of generality, that $N_1\geqslant N_2$. Putting $x=\theta/N$ we have:

$$\hat{g}_{1,2}(X)=\frac{1+x\pm\sqrt{(1+x)^2-4\ \alpha\ (U/\theta)x}}{2\ \alpha}$$

and, differentiating

$$\frac{d}{dx}\ \hat{g}_{1,2}=\frac{\pm\left(\hat{g}_{1,2}-\frac{U}{\theta}\right)}{\sqrt{(1+x)^2-4\ \alpha\ (U/\theta)\ x}}$$

When $x=0$ (i.e. when $N\to\infty$), $\hat{g}_1=1/\alpha$ and $\hat{g}_2=0$. As $1/\alpha<U/\theta$, it follows that $d\hat{g}_1/dx$ is negative and $d\hat{g}_2/dx$ is positive. As x increases from zero, $\hat{g}_1$ will decrease thus continuing to be less than U/θ and $\hat{g}_2$ will increase but, being less than $\hat{g}_1$, will stay under U/θ.

When x becomes θ/N_1 the discriminant will be zero and $\hat{g}_1$ and $\hat{g}_2$ will be $\frac{1+\theta/N_1}{2\,\alpha}$ with $\frac{d\,\hat{g}_1}{d\,x} = -\infty$ and $\frac{d\,\hat{g}_2}{d\,x} = +\infty$.

When x is between θ/N_1 and θ/N_2 (i.e. when N is between the roots), the discriminant (24) is negative, and $\hat{g}_1$ and $\hat{g}_2$ are complex. For $x=\theta/N_2$, $\hat{g}_1$ and $\hat{g}_2$ will both be equal to $\frac{1+\theta/N_2}{2\,\alpha}$. Replacing N_2 by its value,

$$\hat{g}_1=\hat{g}_2=\frac{1}{\alpha}\,\frac{\frac{U}{\theta}-\sqrt{\frac{U}{\theta}\left(\frac{U}{\theta}-\frac{1}{\alpha}\right)}}{2\left[\frac{U}{\theta}-\sqrt{\frac{U}{\theta}\left(\frac{U}{\theta}-\frac{1}{\alpha}\right)}\right]-\frac{1}{\alpha}}$$

or, multiplying the numerator and denominator by $\frac{U}{\theta}+\sqrt{\frac{U}{\theta}\left(\frac{U}{\theta}-\frac{1}{\alpha}\right)}$, and simplifying:

$$\hat{g}_1=\hat{g}_2=\frac{1}{\alpha}\,\frac{\frac{U}{\theta}}{\frac{U}{\theta}-\sqrt{\frac{U}{\theta}\left(\frac{U}{\theta}-\frac{1}{\alpha}\right)}}$$

and, multiplying again both terms by the same factor

$$\hat{g}_1=\hat{g}_2=\frac{U}{\theta}+\sqrt{\frac{U}{\theta}\left(\frac{U}{\theta}-\frac{1}{\alpha}\right)}$$

which shows that $\hat{g}_1$ and $\hat{g}_2$ are greater than $\frac{U}{\theta}$.

Then, $d\hat{g}_1/dx$ will be positive and $d\hat{g}_2/dx$ will be negative, so $\hat{g}_1$ will rise and $\hat{g}_2$ will decrease as x increases. As $x \to \infty$, $\hat{g}_1$ will also tend to ∞ and $\hat{g}_2$ will tend to $\frac{U}{\theta}$. In the figure below, we see the behaviour of $\hat{g}_1$ and $\hat{g}_2$ with x.

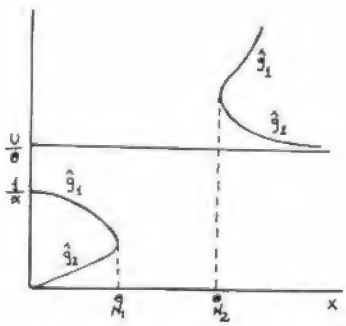


FIG. 1

We saw above that for $g_o \geqslant U/\theta$ there would be no switches and n would always be zero. Switches can only occur for $g < 1/\alpha$, when the descending path with $n=0$ crosses the switching line.

Let us now go back to the behaviour of g after the switch, described by equations (20) or (23). If $N < N_1$ (i.e. $x > \theta/N_1$) the two roots of the second degree polynomial will either be complex or greater than U/θ and therefore, than the going g. It follows then that $\dot{g}$ will always be negative. Trajectories will then be as in figure 2.

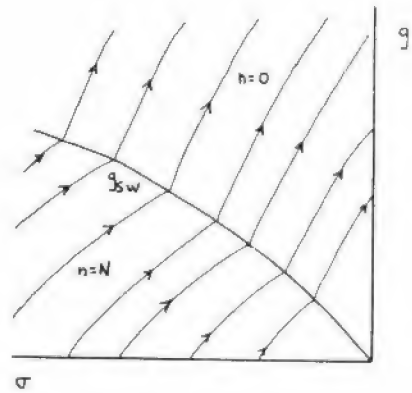


FIG. 2

If $N \geqslant N_1$ there will be real roots $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2$ in the interval $(0,\ 1/\alpha)$; $\dot{g}$ will be positive if $g \in (\hat{g}_2,\ \hat{g}_1)$ and negative if g is outside this interval. The values $\hat{g}_1$ and $\hat{g}_2$ will be asymptotes.

The switching curve, given by (19) has a slope which, as we see from (17), is totally independent of N. Between $\hat{g}_1$ and $\hat{g}_2$, the slope of trajectories after switching is given by (23) and depends on N. Differentiating we have

$$\frac{\partial\,\dot{g}}{\partial\,N} = [R+(R-r)\,g]\,(1-\alpha\,g)\,g > 0$$

which shows that, for given g, the value of $\dot{g}$ will increase with N and tend to ∞ as N tends to ∞.

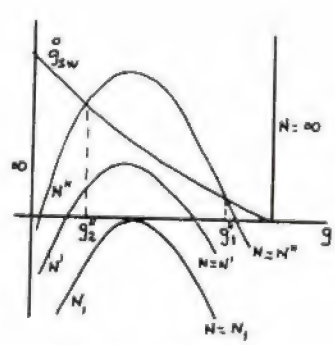


FIG. 3

It follows therefore that, for a small N (such as N' in the figure) the slope of the paths after switching will always be smaller than the slope of the switching curve.

The paths will be as in the figure below

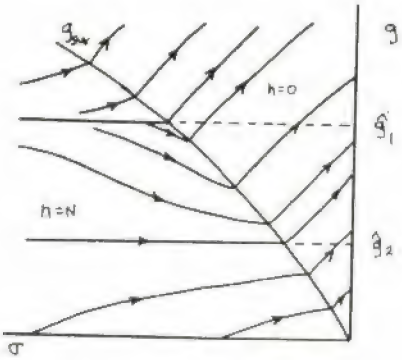


FIG. 4

However, for N sufficiently large (such as N" in figure 3) there will be two points g''_1 and g''_2 for which the paths after switching are tangent to the switching surface and such that for any g in between, the switching curve has a smaller slope than the trajectories after switching. Let A in figure 5 correspond to the point of the switching curve for which $g=g''_1$.

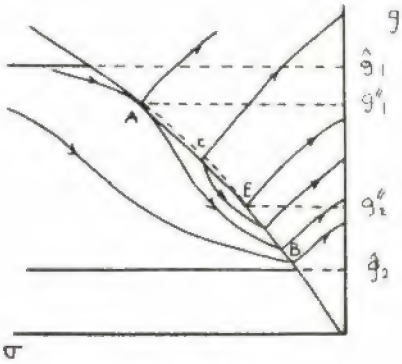


FIG. 5

After switching at A, the path is tangent to the switching curve which means that the forward continuation of the path remains below the switching curve for a while, intersecting it again at B. There will, therefore, exist a dispersal surface between A and E (the point for which $g=g''_2$) such that backward trajectories that intersect the switching surface between B and E will, after switching, terminate in the dispersal surface, at the same point that backward trajectories that would have switched between A and E.

Immediately after the switch, as we saw above, the controls will be $\hat{\gamma}=0$, $\hat{n}=N$ and $\hat{b}=U$. We must now investigate if there will be another change in controls. This will happen if there is a change in sign in

$$S_\gamma = \tau - \varphi_E$$

$$S_n = (1-\alpha\ g)\ \varphi_E - 1$$

or

$$S_b = \varphi_B$$

Writing equation (21) as

$$\mathring{\varphi}_E = N\ R[(1-\alpha\ g)\ \varphi_E - 1] + \{\theta\ R - k + \alpha\ N\ g\ [R + (R-r)\ g]\}\ \varphi_E + U\ R\ \varphi_B$$

we see that as long as S_n and S_b remain positive, φ_E will increase and therefore S_γ will continue to be negative and $\hat{\gamma}$ to be zero.

If g decreases, as happens in figure 2 and below $\hat{g}_2$ and above $\hat{g}_1$ in figure 4, then $S_n=(1-\alpha\ g)\ \varphi_E - 1$ will necessarily increase and will thus remain positive. But, if g is between $\hat{g}_2$ and $\hat{g}_1$, g will increase and we must differentiate Sn to find out whether there will be a switch in N.

$$\mathring{S}_n = \frac{d}{d\ \sigma}\ [(1-\alpha\ g)\ \varphi_E - 1]$$

$$= -\alpha\ \mathring{g}\ \varphi_E + (1-\alpha\ g)\ \mathring{\varphi}_E$$

Replacing $\mathring{g}$ and $\mathring{\varphi}_E$ by the values given by equations (20) and (21) and simplifying we obtain:

$$\mathring{S}_n = \{\alpha(U-\theta\ g)\ [R+(R-r)\ g] + (1-\alpha\ g)\ (\theta\ R - k)\}\ \varphi_E + NR\ [(1-\alpha\ g)\ \varphi_E - 1] + NR\ (1-\alpha\ g)\ \varphi_B$$

Since g will be below $\hat{g}_1$ and $\hat{g}_1$ is lower than $1/\alpha$ and, therefore than U/θ, it follows that aslong as φ_E, S_n and φ_E remain positive, S_n will increase and will therefore continue to be positive. So n cannot be the first control to switch.

Finally

$$\mathring{S}_b = \mathring{\varphi}_B = N(R-r)\ [(1-\alpha\ g)\ \varphi_E - 1] + [U(R-r) - k]\ \varphi_B + \{\theta\ (R-r) - \alpha\ N[R+(R-r)\ g]\}\ \varphi_E$$

We are still assuming that $\theta(R-r) - \alpha\ NR > 0$. If $\theta(R-r) - \alpha\ N[R+(R-r)\ g]$ is also positive for all $g < 1/\alpha$, φ_B cannot change sign, which means that there will be no more switches. The final picture is then as shown in figures 2, 4 or 5.

For a switch in b to be possible is then necessary that we have

$$\theta(R-r) - \alpha\ N[R+(R-r)\ g] < 0$$

i.e.

$$g > g_1^+ = \frac{\theta(R-r) - \alpha\ NR}{\alpha\ N(R-r)}$$

On the other hand, in (22) the coefficient of φ_E is

$$[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]\ (R-r) - \alpha\ N[R+(R-r)\ g]$$

which is zero for

$$g=g_2^+=\frac{\theta(R-r)-\alpha\ NR+N(R-r)}{2\ \alpha\ N(R-r)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(g_1^+ + \frac{1}{\alpha}\right)$$

If φ_B becomes zero for $g \geqslant g_2^+$ then $\mathring{\varphi}_B < 0$ at that time, so there will be a straight switch from $b=U$ to $b=-[\theta+(1-\alpha g)\ N]$.

As φ_B reaches zero for lower and lower values of g then, before we reach g_1^+ there will certainly come a point for which when $\varphi_B=0$, $\mathring{\varphi}_B$ is zero, for if we ever reached g_1^+ then we would have $\varphi_B=0$ and $\mathring{\varphi}_B > 0$ which is absurd.

When $\varphi_B=\mathring{\varphi}_B=0$, the second derivative is

$$\mathring{\mathring{\varphi}}_B=\alpha\ N^2[R+(R-r)\ g]^2-N\ k(R-r)-$$
$$-\frac{2\ \alpha\ N^2\ (R-r)^2\ [\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ g[R+(R-r)\ g]}{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ (R-r)-\alpha\ N[R+(R-r)\ g]}+$$
$$+\frac{2\ \alpha\ N^2(R-r)^2\ [R+(R-r)\ g]}{[\theta+((1-\alpha\ g)\ N]\ (R-r)-\alpha\ N[R+(R-r)\ g]}\ b$$

Since we must necessarily have $g < g_2$ it follows that $\frac{\partial\ \mathring{\mathring{\varphi}}_B}{\partial\ b} > 0$. Now, as φ_B reached zero from positive values with $\mathring{\varphi}_B=0$, $\mathring{\mathring{\varphi}}_B(b=U)$ is surely non- negative.

$\mathring{\mathring{\varphi}}_B(b=-[\theta+(1-\alpha\ g)\ N])$ is necessarily a lower value. If it is negative then either $b=U$ (which gives rise to $\varphi_B(\sigma^+) > 0$ or $b=-[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]$ which causes $\varphi_B(\sigma^+)$ to be negative, are optimal policies. Indeed there must be a $b^+ \in [-[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]; U]$ such that $\mathring{\mathring{\varphi}}_B(b=b^+)=0$. This value of b gives then rise to a universal surface [1].

Along it will shall have (from the condition $\mathring{\varphi}_B=0$)

$$\varphi_E=\frac{N(R-r)}{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ (R-r)-\alpha\ N[R+(R-r)\ g]}\ , \quad (25)$$

and, from $\mathring{g}=\frac{d\ \varphi_E}{d\ g}\ /\ \frac{d\ g}{d\ \sigma}$ we obtain

$$g=\frac{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ (R-r)-\alpha\ N[R+(R-r)\ g]}{2\ \alpha\ N(R-r)^2}$$
$$\{\alpha\ N[R+(R-r)\ g]^2-k(R-r)\} \quad (26)$$

which gives us the differential equation of the universal surface.

The bynomial in braces is always positive as $\alpha\ NR > \theta\ (R-r)$ implies $\alpha\ N[R+(R-r)\ g]^2 > \theta\ R(R-r) > K(R-r)$. Then the sign of $\mathring{g}$ is given by the numerator of the first term. This is positive for $g < g_2^+$, so g increases for $g < g_2$, and tends to zero as $g \uparrow g_2^+$.

From (25) we see that φ_E will rise so there will be no change in γ. Also

$$S_n=(1-\alpha\ g)\ \varphi_E-1$$
$$=\frac{\alpha\ N[R+(R-r)\ g]-\theta\ (R-r)}{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ (R-r)-\alpha\ N[R+(R-r)\ g]}$$

and, as g is necessarily less than g_2^+ and more than g_1^+, it follows that Sn will be positive. Thus there will be no switch in n.

As $\mathring{g}$ decreases we see from (8) that it is necessary that b^+ increases. If $N < N_1$ we know that the first term in (20) is negative which means that any $\mathring{g}$ positive however small can be obtained with $b^+ < U$. So the universal surface will have an asymptote at $g=g_2$. At any point of the universal surface we can switch to either $b=U$ or $b=-[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]$. In the first case we shall have $\mathring{\mathring{\varphi}}_B > 0$ so φ_B will become positive thus vindicating the choice. The equations of the system will then be (20), (21) and (22) and g will fall. In the second case φ_B will become negative so the choice will also be optimal. The equations ruling the system will become.

$$\mathring{g}=[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ (g+1)\ [R+(R-r)\ g]$$

$$\mathring{\varphi}_E=-NR+\varphi_E\{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]+\alpha\ NR[R+(R-r)\ g]-$$
$$-k\}-\varphi_B\{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ R+[R+(R-r)\ g]\ \alpha\ N\ g\}$$

$$\mathring{\varphi}_B=-N(R-r)+\varphi_E\ \{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ (R-r)-\alpha\ N[R+$$
$$+(R-r)\ g]\}-\varphi_B\{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]R+$$
$$+[R+(R-r)\ g]\ \alpha N-k\}$$

and we see immediately that g will rise with σ.

Since $\mathring{\varphi}_E$ can also be written as

$$\mathring{\varphi}_E=[(1-\alpha\ g)\ \varphi_E-1]\ NR+\{\theta R-k+\alpha\ NR\ [R+$$
$$+(R-r)\ g]\}\ \varphi_E-\varphi_B\ \{[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]\ R+[R+$$
$$+(R-r)\ g]\ \alpha\ N\ g\}$$

we see that as long as $S_n=(1-\alpha\ g)\ \varphi_E-1$ is positive and φ_B negative φ_E will rise, so there will be no change in γ.

The only two changes that can occur will take place if φ_B becomes positive again or S_n negative. If φ_B changes sign first b will switch to U and the trajectory after switching will have a lower slope than before thus tending to intersect other trajectories with

1. In the terminology of Isaacs (1965).

$b = -[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]$. This means that there will be a dispersal surface ending the backward trajectories.

The terms in n and b in the expression of the Hamiltonean are, as we know

$$P = n\ S_n + b\ S_b$$

and, if $b = -[\theta + (1-\alpha\ g)\ n]$ we have

$$P = -\theta\ S_b + [S_n - (1-\alpha\ g)\ S_n]\ n$$

It follows then that for $S_n > (1-\alpha\ g)\ S_b$, even if $S_n < 0$ we shall still have $n=N$, changing to $n=0$ when $S_n < (1-\alpha\ g)\ S_b$. Now $S_n = (1-\alpha\ g)\ \varphi_E - 1$ so if g increases, the change must necessarily occur before $g = \frac{1}{\alpha}$ as there we would have

$$S_n = -1 < (1-\alpha\ g)\ S_b = 0$$

So if φ_B did not change sign first we shall, before we reach $g = \frac{1}{\alpha}$ change n to $n=0$. If φ_B changes sign after that the switched paths will have as controls $b=U$ and $n=0$. If g, though greater than $\frac{1}{\alpha}$ is still less than $\frac{U}{\theta}$, g will tend to fall with g (see equation (13)) and, as before we must have a dispersal surface. But if $g > \frac{U}{\theta}$, g will rise with σ and we can also have a straight switch. The full picture is then as shown in figure 6.

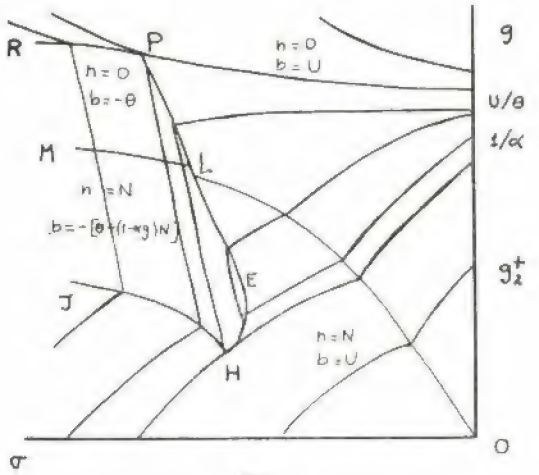


FIG. 6

We see a universal surface H I from where emerge downward-sloping curves with $n=N$, $b=U$ and upward--sloping ones with $n=N$, $b=-[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]$. These last ones either end in the dispersal surface E L or switch n to zero at switching surface L M and end in dispersal surface L P or by switching b to U at the switching surface P. R.

If $N \geqslant N_1$ then for $n=N$ and $b=U$ $\dot{g}$ will be positive if g is between $\hat{g}_2$ and $\hat{g}_1$. As we saw above the universal surface lies between g_1^+ and g_2^+. As we saw above the universal surface lies between g_1^+ and g_2^+ and has an asymptote at g_2^+ which means that as g rises to g_2^+ the slope necessary to keep on the universal surface will tend to zero. If g_2 falls outside the interval $[\hat{g}_2, \hat{g}_1]$ then the universal surface can approach its asymptote with b^+ in the interval $[-[\theta+(1-\alpha\ g)\ N],\ U]$ as we see in figures 7, 8 or 9.

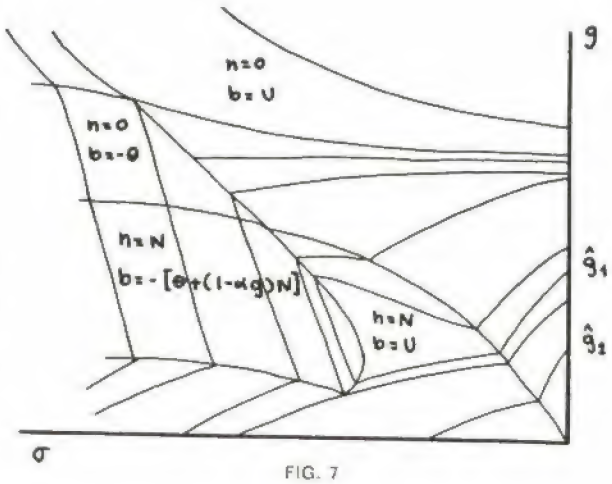


FIG. 7

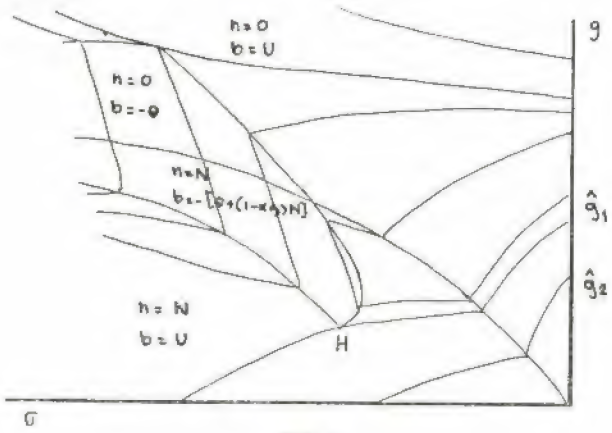


FIG. 8

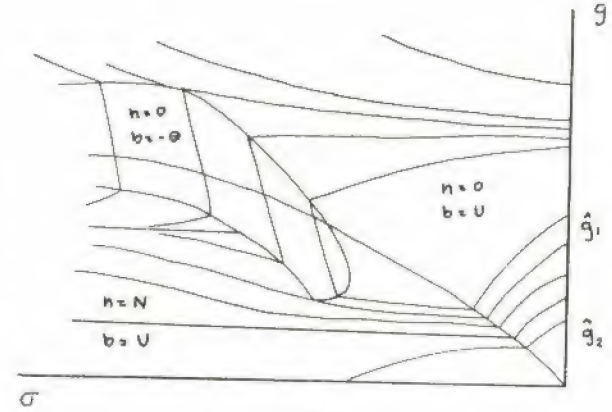


FIG. 9

But if g_2 falls inside the interval then the universal surface's asymptote could only be approached for values of b greater than U. That means that at some point I where g is so near g_2^+ that $b^+ = U$, the universal surface must end and the only possible optimal trajectory is the one with $b = -[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]$[1]. The universal surface will be followed by a switching surface where the trajectories with b = U that originated in the universal surface will switch their control to $b = -[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]$ as is shown in figure 10.

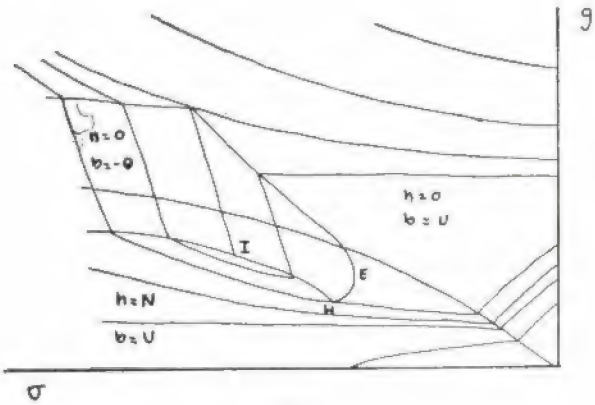


FIG. 10

In particular, if at point H the value of b necessary to trace the universal surface is already too large, the universal surface will vanish altogether to be replaced by a continuation of the switching surface, as shown in figure 11.

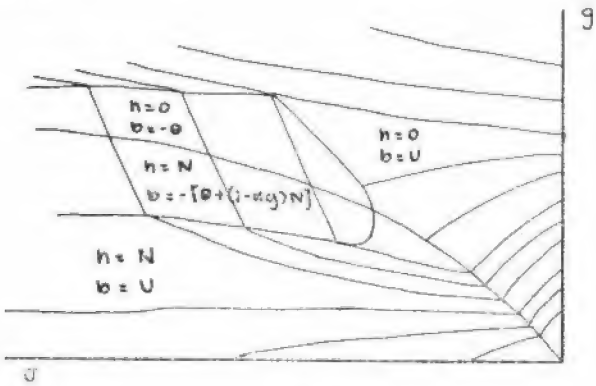


FIG. 11

Having thus completed the study of the case $\ddot{\varphi}_B[b = -[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]] \leqslant 0$ both for $N < N_1$ and $N \geqslant N_1$, let us now see what would happen if at the point where $\varphi_B = \dot{\varphi}_B = 0$ we had $\ddot{\varphi}_B[b = -[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]] > 0$. Then, the value of b which would be needed at H to preserve the singular condition $\varphi_B = \dot{\varphi}_B = 0$, would be smaller than $-[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]$ corresponding thus to a slope steeper than that obtained with $b = -[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]$. Since this is the smallest value of b we can select it follows that the only possible backward trajectory at H is the one obtained with b = U.

As $\ddot{\varphi}_B$ is positive for $b = -[\theta + (1-\alpha\ g]\ N]$ at H, $\ddot{\varphi}_B$ will also be positive for paths that switched b from U to $-[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]$ near H; this means that φ_B will only temporarily be negative and will tend to become positive again.

On the other hand as we know, the slope of the universal surface is smaller as it approaches its asymptote so, when φ_B reaches zero again, if $\ddot{\varphi}_B = 0$ we may have a universal surface that can be traced with admissible values of b^+.

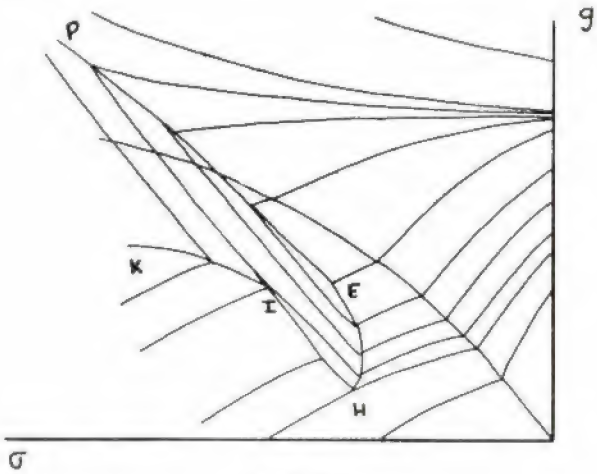


FIG. 12

In figure 12 we see a case where $N < N_1$. Paths switch b from b = U to $b = -[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]$ at the switching surface between E H or terminate at dispersal surface E P. At I the universal surface is tangent to the trajectory with $b = -[\theta + (1-\alpha\ g)\ N]$ and it proceeds from there with admissible values of b^+, to approach from below its asymptote at $g = g_2$.

If $N \geqslant N_1$ and g_2 is between $\hat{g}_2$ and $\hat{g}_1$, then the universal surface will eventually come to an end when b^+ tends to go above U, as in figure 13.

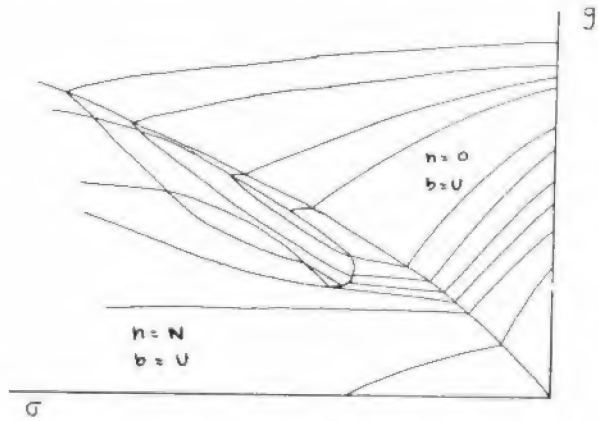


FIG. 13

[1] See Kelley et al. (1967), section 3.17.

We have finally to consider the case

$$\alpha R N \geqslant \theta(R-r)$$

As we saw above, if the opposite happens there can be no switch in b for $g < g_1^+ = \dfrac{\theta(R-r)-\alpha R N}{\alpha N(R-r)}$.

Now g_1^+ is negative and $b = -[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]$ is an optimal policy even for some point of the line $g=0$.

The analysis follows the same lines as in Caldeira--Saraiva (1979) so we shall not repeat it here. In fact the difference between the model considered there and the one we have now is the sign of $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{U}{\theta}$. But since most of the analysis for $\alpha R N \geqslant \theta(R-r)$ indicates that the optimal b is negative, the value of U (and therefore the fact that U is greater or smaller than θ/α) is irrelevant. The pictures that follow summarize thus the results:

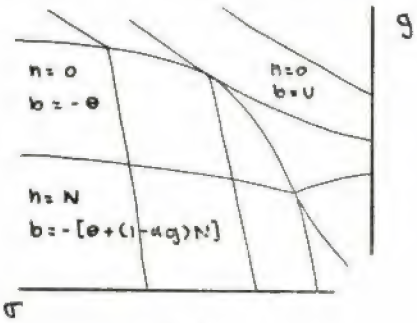


FIG. 14

In Fig. 14 $\alpha R N \geqslant (\theta+N)\ (R-r)$ and the line $g=0$ is a semi-universal surface from where trajectories with $n=N$, $b = -[\theta+(1-\alpha\ g)\ N]$ emerge. The trajectories, similarly to what we saw above switch n to zero before g reaches $1/\alpha$ and eventually b to U, or alternatively terminate at a dispersal surface.

In figure 15, $\alpha R N < (\theta+N)\ (R-r)$ and the line $g=0$ is only a semi-universal surface till

$$\sigma = \frac{1}{(\theta+N)\,R-k}\ \ln\ \frac{N[\alpha N R^2-k(R-r)]}{(\theta R-k)\ [(\theta+N)\ (R-r)-\alpha N R]}$$

At this point $\overset{\circ}{S}_b = S_b = 0$ and

$$\overset{\circ\circ}{S}_b = N[\alpha N R^2-k(R-r)] + \frac{2\alpha N^2 R\ (R-r)^2}{(\theta+N)\ (R-r)-\alpha N R}\ b$$

$\overset{\circ\circ}{S}_b$ increase with b and is certainly positive for $b = U$. If it is negative for $b = -(\theta+N)$ then there will be an intermediate value of b which will start a universal surface with the same defining equations as before (see equations (25) and (26)).

If g_2^+ lies outside the interval $[\hat{g}_2, \hat{g}_1]$ (or if $\hat{g}_2$, $\hat{g}_1$ are complex) the universal surface will rise to its asymptote at g_2, as in figures 15 or 16.

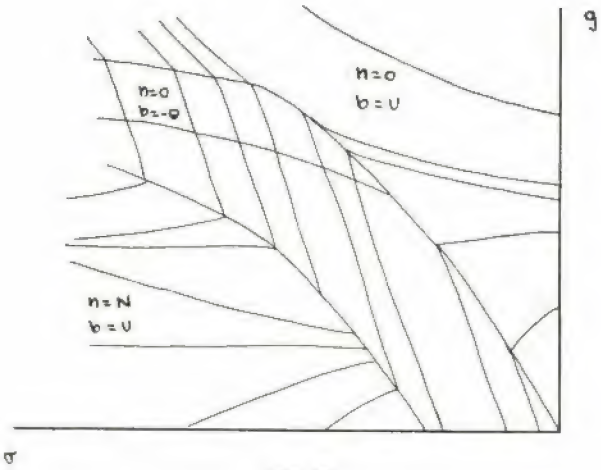


FIG. 15

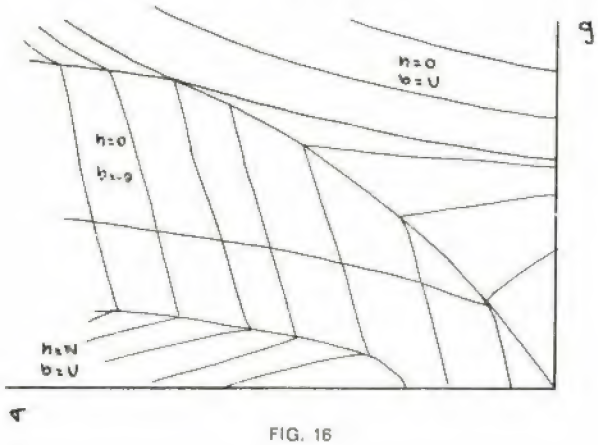


FIG. 16

If however g_2^+ falls inside the interval $[\hat{g}_2, \hat{g}_1]$ then, as before, the universal surface will stop when b^+ reaches U and change to a switching surface as in figure 17.

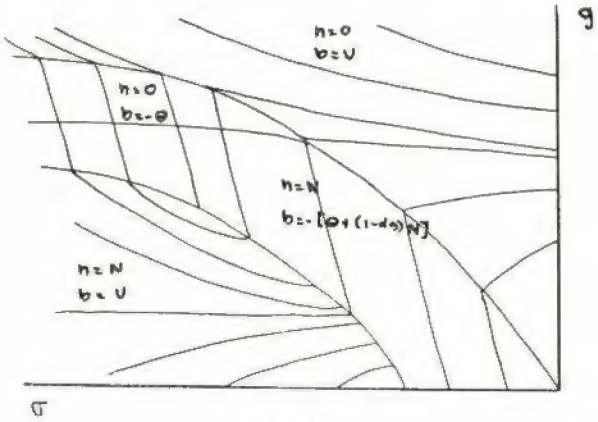


FIG. 17

4 — CONCLUSIONS

Let us now interpret the results obtained.

The condition

$$\frac{U}{\theta} > \frac{1}{\alpha}$$

means essentially that both U and α are relatively large, i.e., that there is a good availability of credit but that borrowing has a veery strong depressing effect on the market value of shares. If N is not too large, borrowing at the largest rate is the policy one would expect, complemented by issuing shares if g is sufficiently low to make the issuing premium small and/or the time left to recip benefits sufficiently large to compensate for the premium paid to underwriters. That is indeed the situation we observe in figures 2, 4 and 5.

When the gearing ratio is low, B is small compared to E. Then if one is borrowing at maximum rate and at the same time issuing shares, the effect of the borrowing on B is proportionally larger than the effect the share issuing has on E. Thus g will rise. If α is large, then for values of g comparatively low, the proceedings of share issuing are low as the percentages demanded by underwriters will tend to be large. If one is borrowing and issuing shares at maximum rates, the effect on B is greater and again g rises.

However for intermediate values of g, as we see in figures 4 and 5, share issuing while borrowing will reduce the gearing ratio. In this region, it is clear from the considerations above that when the time left is large it is better to issue shares and when it is small it is better not. There can exist, as in figure 5, a region in between where it is indifferent to issue or not. This dispersal surface is later (i.e., for smaller values of σ) than the switching surface, since the issuing of shares, as it decreases gearing and premium associated with it, is itself a factor making for the atractivness of issuing them, thus making it possible to be undertaken nearer the end of the project.

For large values of N, i.e., those able to satisfy $\alpha N[R+(R-r)g] > \theta(R-r)$ for some $g < 1/\alpha$, then despite the high values of α, the large size of issues allowed may make share issuing atractive. So much so that as policy of repurchasing bonds (negative values of b) to decrease gearing and underwriter premiums may be indicated for large values of g and σ, as a prelude to share issuing. This is what we see in figures 6 to 17.

In the last figures the size of possible issues is so large ($\alpha N R > \theta(R-r)$) that it may even be optimal to reduce the gearing all the way to zero.

5 — BIBLIOGRAPHY

[1] **Caldeira Saraiva, F.** — *The optimal financing plan for a firm under conditions of uncertainty.* Proceedings of 'Encontros sobre métodos quantitativos aplicados a variáveis regionalizadas' C. V. R. M., Nov. 1979.

[2] **Isaacs, R.** — *Differential Games,* New York, 1965.

[3] **Kelley, H.; Kopp, R.** and **Gardner Mayer, H.** — *Singular Extremals* in Leitman, G. (ed.) 'Topics in Optimization', New York, 1967.

[4] **Krouse, C.** — *On the Theory of Optimal Investment, Dividends and Growth in the Firm,* American Economic Review, 1973.

[5] **Krouse, C.** and **Lee, W.** — *Optimal Equity Financing for the Corporation.* Journal of Financial and Quantitative Analysis (JFQA), 1973.

[6] **Perrakis, S.** — *A note on Optimal Equity Financing for the Corporation* (JFQA), 1976.

[7] **Senchack, J. A.** — *The Firm's Optimal Financial policies: solution, equilibrium and stability,* JFQA, 1975.

(Continuação da pág. 391)

NOTICIÁRIO

Bloco Ensino (1,5 DIAS)

2 Lições Plenárias.
Cartazes e realização de experiências.
Filmes didácticos.
Grupos de Trabalho preparados sobre:

1. Bancos de Objectivos.
   a) Curso Geral.
   b) Curso Complementar.
   c) 12.° Ano.
   d) 1.° Ano da Universidade.
2. Improvisação de material de Laboratório.
3. Conceito de mole.
4. Segurança e organização do Laboratório.
5. Investigação de dificuldades de aprendizagem.
6 Psicologia na aprendizagem da Química.
6. Psicologia na aprendizagem da Química.
7. Avaliação: projectos de testes padronizados.
8. Avaliação do trabalho de laboratório.

Durante todo o Encontro estará patente uma exposição de material bibliográfico, cientifico e didáctico.

Informação complementar sobre os 3 blocos além de informação sobre hotéis, programa social e patrocinadores, será apresentada na 2.ª circular.

Morada para correspondência:

Comissão Coordenadora do 4.° Encontro Anual da Sociedade Portuguesa de Química
Av. da República, 137-4.°
1000 Lisboa

(Continua na pág. 407)

Simulador industrial de controlo de nível

J. R. CALDAS PINTO (*)

RESUMO

Para fins didáticos construiu-se em 1976/77, no Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa (C. A. U. T. L.), um sistema para estudo do controlo de nível, utilizando sempre que possível componentes industriais. Na nota técnica anexa descreve-se sumariamente este sistema.

ABSTRACT

For didactical purposes, a level control system has been assembled at C. A. U. T. L., in 1976/77. Industrial components were preferably used. This technical paper presents a brief description of the system.

1 — INTRODUÇÃO

Talvez devido a um certo atraso no ensino do controlo automático aplicado na indústria, não existem vulgarizados na nossa Universidade modelos mais ou menos reais de aplicação deste, ainda que na indústria existam já alguns modelos normalmente utilizados na formação de técnicos especializados.

O modelo construído no C. A. U. T. L. (Fig. 1 e 2) pretende de uma forma modesta colmatar essa falha, em particular em relação ao ensino superior de engenharia na Universidade de Lisboa. Nesta fase construtiva (muito se pode fazer no sentido da sua ampliação) tem-se a possibilidade de estudar o controlo automático do nível de um depósito quer actuando no caudal de entrada quer no de saída deste. Para o efeito está instalado um regulador de acção PID (Proporcional, Integral, Derivativo). Na Fig. 3 e 4 apresentam-se os dois diagramas de blocos actualmente possíveis.

Poder-se-ão criar perturbações bem determinadas ao sistema através da actuação no caudal de saída do depósito D (Caso I) ou através da actuação no caudal de entrada de D_A (Caso II).

Nas figuras 3 e 4 consideram-se os componentes do sistema caracterizados por um ganho constante, o que é localmente válido. Na determinação da função

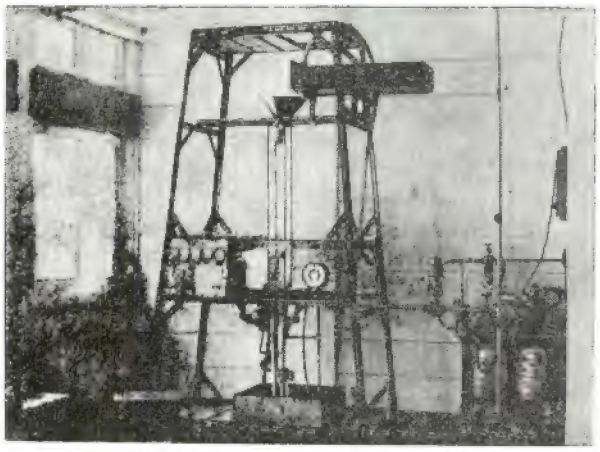


FIG. 1

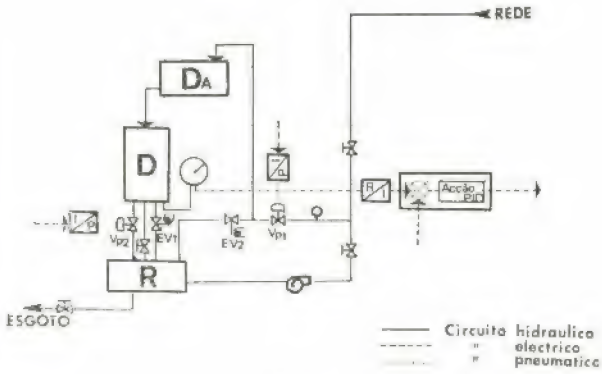


FIG. 2

(*) Assistente no I. S. T., investigador no C. A. U. T. L. — (Instituto Nacional de Investigação Científica), na Linha de Acção 1: Controlo de Processos Industriais.

Manuscrito recebido para publicação em 11/7/80.

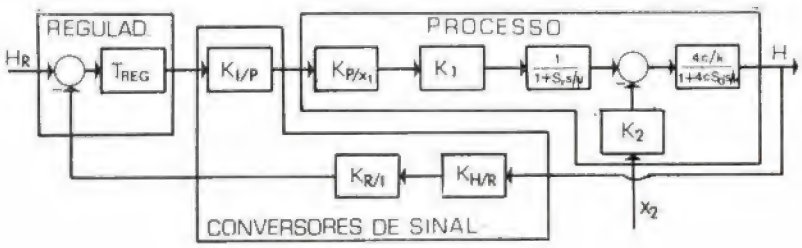


FIG. 3

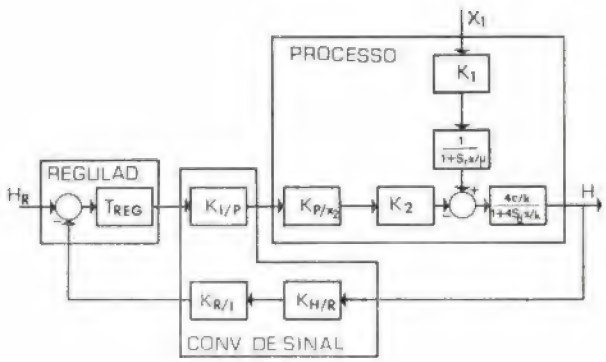


FIG. 4

de transferência do depósito D linearizou-se a função Altura de líquido — Caudal de saída e daí a validade do modelo se restringir a pequenas variações de nível do depósito.

2 — DESCRIÇÃO DO PROCESSO (v. Fig. 2)

2.1 — Circuito da água

O nível que se pretende controlar é o da água num depósito cilíndrico D. Utiliza-se um segundo depósito D_A com descarregador aproximadamente linear, com o objectivo de introduzir um atraso no sistema.

O ciclo da água é o seguinte:

Entrada de água em D_A regulada por uma válvula de actuação pneumática V_{p1} e saída para D. De D a água passa para um reservatório R:

por uma válvula de actuação pneumática V_{p2} e/ou

por uma válvula manual e/ou

por uma electroválvula E V 1

Para garantir um nível de referência constante os tubos de descarga do depósito D mergulham no reservatório R de nível de água constante.

Em funcionamento normal o circuito é fechado, sendo a água recirculada através de V_{p1} por uma bomba cuja curva característica é tal que a altura manométrica de elevação pouco varia para o regime de caudais utilizado.

2.2 — Variáveis medidas

2.2.1 — Medida de nível do depósito D

A medida de nível do depósito D faz-se por medida da pressão hidroestática no fundo daquele, utilizando um manómetro com saída sob a forma de variação de uma resistência eléctrica.

2.2.2 — Medida da pressão da água antes da válvula V_{p1}

Para uma leitura da pressão da água à saída da bomba utiliza-se um manómetro estático.

2.3 — Regulador

Como elemento fundamental de regulação utiliza-se um regulador de acções proporcional, integral e/ou derivada (PID), prevendo-se igualmente a regulação numérica (por processador ou microprocessador).

2.4 — Adaptadores de sinal

Em virtude do regulador ter entradas e saída em corrente eléctrica, utilizam-se conversores electro-pneumáticos (E/P) — um para cada válvula pneumática e um conversor resistência/corrente eléctrica.

3 — VARIÁVEIS DO PROCESSO

3.1 — Lógicas

Detector de nível máximo tipo boia. Utiliza-se como sistema de protecção e alarme. Na Fig. 5 mostra-se o circuito eléctrico que lhe corresponde.

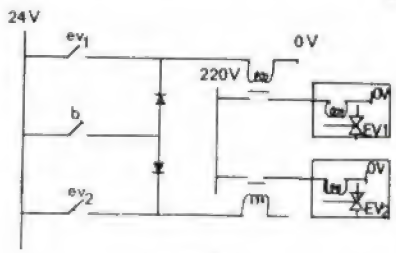


FIG. 5

3.2 — Analógicas

3.2.1 — Variáveis de entrada

— Comando do valor de referência do nível. Há possibilidade de se ter como variável de referência toda a função que se possa gerar electricamente.

— Comando do caudal de saída.

Variação deste em escalão através da electroválvula EV1 ou outra função qualquer através de V_{p2} e respectivo conversor E/P.

— Perturbações.

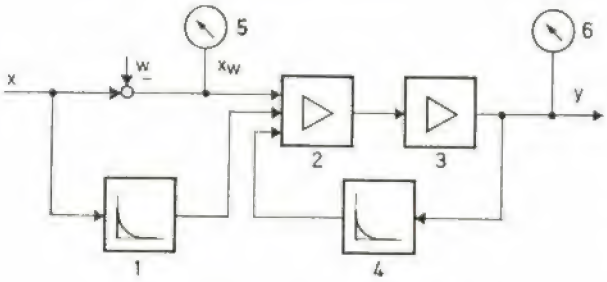
O caudal de entrada em D_A depende não só da abertura da válvula V_{p1} mas também da pressão a montante e a jusante desta. Esta depende da bomba de elevação que a faz depender do caudal. Contudo a variação é pequena na zona normal de funcionamento.

3.2.2 — Variáveis de saída

A variável de saída é o nível de água no depósito D, cujo valor se pode obter por leitura da pressão no fundo do depósito, linearmente relacionada com a altura.

4 — COMPONENTES

4.1 — Regulador de acção Proporcional, Integral e/ou Derivada (tipo PHILIPS PCS)



1 — amplificador de acção derivada
2 — pré-amplificador
3 — amplificador de saída
4 — realimentação RC
5 — medida do erro x_w
6 — medida da saída

4.1.1 — Função de transferência

$$\frac{Y}{X} = K_p \left(1 + T_V\, s + \frac{1}{T_n s}\right)$$

com X_P^* ajustável entre 2 % e 400 % em 12 passos

T_n^* » » 2 a 30 m por escalões ou $T_n = \infty$

T_V^* » » 0 a 13 m continuamente

sendo

$$X_P = \frac{1}{A} X_P^*$$

$$T_n = A\ T_N^* \quad e \quad A = 1 + \frac{T_V^*}{T_N^*}$$

$$T_V = \frac{1}{A} T_V^*$$

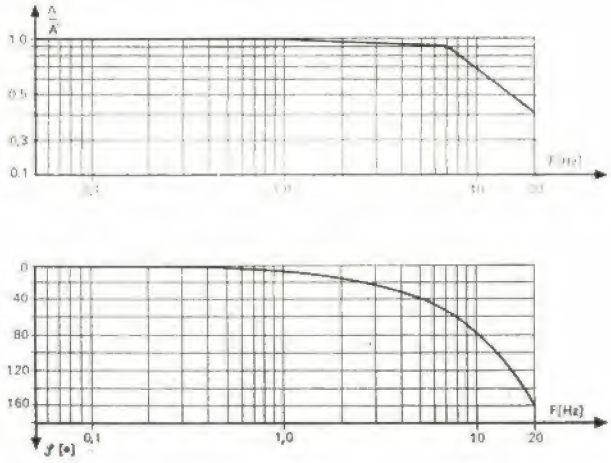
4.1.2 — Entrada: corrente eléctrica 0 a 20 mA
Saída : » » 0 a 20 mA

4.2 — Conversor electropneumático (tipo PHILIPS E/P)

4.2.1 — Função de transferência

$$\frac{Y}{X} = K_{I/P}$$

4.2.2 — Característica dinâmica (*)



4.2.3 — Entrada: corrente contínua 0-20 mA
Saída : ar sob pressão de 0,2 a 1 bar

4.3 — Conversor: resistência — corrente eléctrica (tipo PHILIPS)

4.3.1 — Função de transferência

$$\frac{Y}{X} = K_{R/I}$$

(*) Segundo o manual Philips PCS (figura 1).
(*) Segundo o manual PHILIPS E/P.

4.3.2 — **Entrada: 50-30-50 Ω**
Saída : 0 — 20 ma

4.4 — **Manómetro com saída eléctrica** (tipo PHILIPS)

4.4.1 — **Função de transferência**

$$\frac{Y}{X} = K_{H/R}$$

4.4.2 — **Entrada: 0 a 1000 mm de H_2 0**
Saída : 50-30-50 Ω

4.5 — **Válvulas pneumáticas e respectivos actuadores** (tipo DRAYTON)

4.5.1 — **Equações características**

$$Q = 7{,}55 \cdot 10^{-5}\, C_V\, \Delta h$$

$$C_V = C_{V\,min}\left[\frac{C_{V\,max}}{C_{V\,min}}\right]^{\frac{X}{X_{max}}}$$

Q m^3/s

h — m de H_2 0

$V_{P1} \rightarrow C_{V\,max} = 6$

$V_{P2} \rightarrow C_{V\,max} = 10$

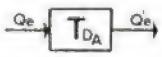
4.5.2 — **Entrada: 0,2-1 bar**
Saída : caudal

Na Fig. 6 e 7 apresentam-se as curvas características das válvulas utilizadas.

4.6 — **Electroválvulas (REMSA) normalmente fechadas**

5 — **PROCESSO**

5.1 — **Depósito com descarregador linear (D_A)**



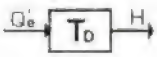
Função de transferência

$$\frac{Q'_e}{Q_e} = \frac{1}{\frac{S_R}{\mu}\, s + 1}$$

S_R — área da base do depósito

μ — constante de proporcionalidade

5.2 — **Depósito D**



Função de transferência

$$\frac{H}{Q_e} = \frac{4\, c/k}{\frac{4c}{k}\, S_o\, s + 1}$$

c — constante resultante da linearização de H.

k — constante relacionada com a perda de carga na válvula manual

S_o — área de base do depósito

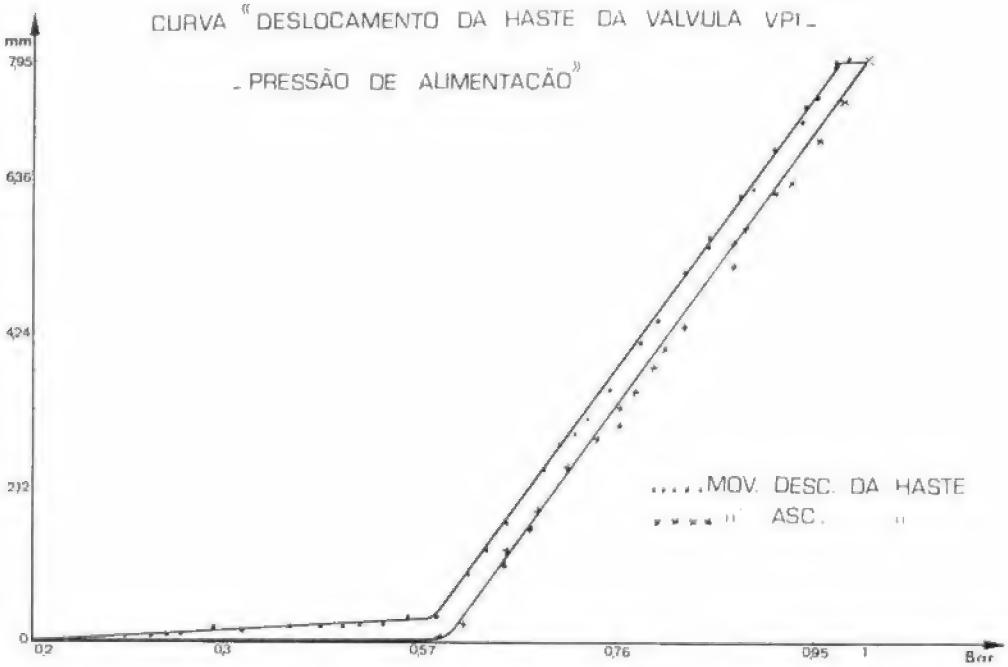


FIG. 6

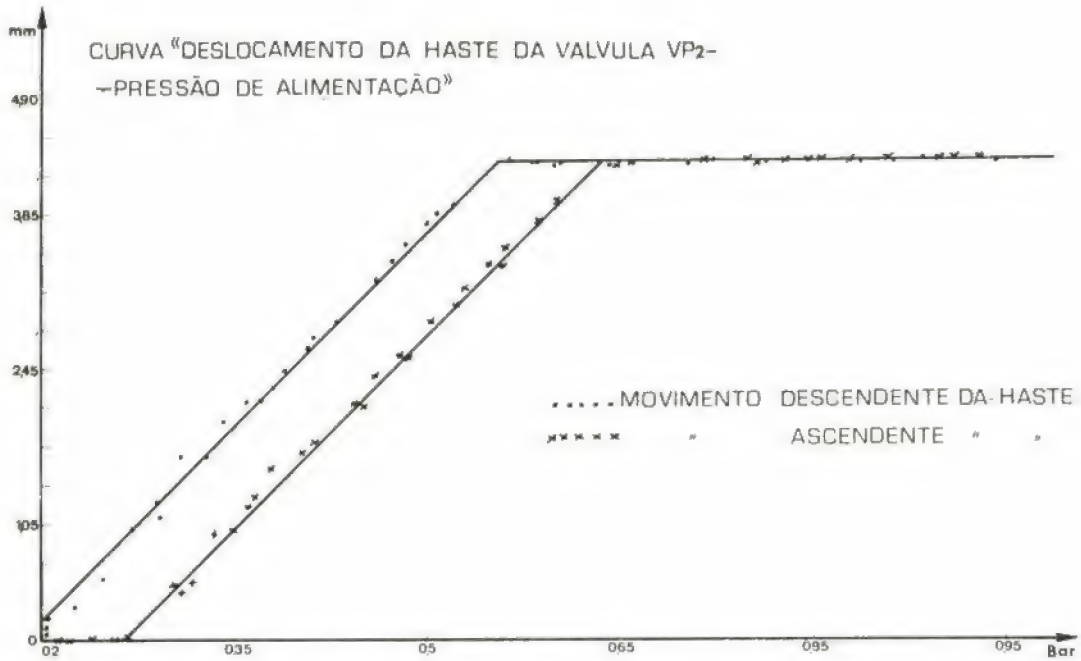


FIG. 7

CONCLUSÃO

Este protótipo faz parte de um projecto desenvolvido no Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa em colaboração com o Departamento de Sistemas (Máquinas) do I. S. T., e no âmbito da Linha de acção «Controlo de Processos Industriais». Destina-se essencialmente a fins didáticos e nele se previu a possibilidade de controlar uma segunda variável — a salinidade da água em circulação, e também o controlo numérico por computador.

(Continuação da pág. 402)

NOTICIÁRIO

HOMENAGEM AO PROFESSOR FERRER MONCADA

Por iniciativa dum grupo de Docentes de Electrotecnia —, antigos alunos e/ou colegas do Professor Ferrer Moncada, procurar-se-á realizar, em Março de 1981, um número da «Técnica» em homenagem ao falecido Professor. Para essa revista a colaboração será exclusivamente sob a forma de NOTAS CIENTÍFICAS *. Todos quantos se desejem associar deverão fazer uma inscrição provisória (em carta dirigida à «Técnica») até 30 de Novembro de 1980, devendo todos os originais dar entrada na redacção da «Técnica» até 15 de Janeiro de 1981. Caso o número de trabalhos recebidos conduza a uma revista com um número de páginas superior a 64 (sessenta e quatro), o critério de publicação será a data de recepção dos manuscritos, transitando os restantes originais para números seguintes da «Técnica» onde surgirão com a referência «em homenagem ao Professor Ferrer Moncada».

* NOTAS CIENTÍFICAS é uma secção recentemente criada na «Técnica», destinada à publicação de resultados originais de investigação teórica ou experimental. Os trabalhos remetidos a esta secção deverão ser redigidos preferencialmente em inglês ou ainda português ou francês. Deverão conter resumo e abstract muito sucintos e não poderão exceder 5 (cinco) páginas dactilografadas (em papel A-4, a dois espaços), incluindo espaço para resumo, abstract, figuras e referências bibliográficas.

A Direcção da «Técnica»

CURSOS NO ÂMBITO DA GEOTECNIA

No seguimento dos cursos que anualmente vem organizando desde o ano lectivo de 1975/76, vai a Universidade Nova de Lisboa, iniciar em 7 de Outubro de 1980, 2 cursos de pós-graduação, um em **Geologia de Engenharia,** especialmente destinados a licenciados em Geologia e em Engenharia de Minas e o outro em **Mecânica dos Solos,** especialmente destinado a licenciados em Engenharia Civil.

Os interessados poderão obter mais informações nos Serviços Académicos da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL/Seminário dos Olivais (Moscavide), Lisboa.

Com a experiência do passado e a tecnologia do presente constroemos o futuro

Porto de recreio Vilamoura-Portugal

OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS
CENTRAIS TERMOELÉCTRICAS
APROVEITAMENTOS HIDRÁULICOS
CIMENTARIAS
SIDERURGIAS
SILOS, TORRES E CHAMINÉS
HOTEIS E EDIFICIOS
PONTES E VIADUTOS
FUNDAÇÕES E GEOTECNIA

CT

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, S.A.R.L.

Av. 24 de Julho, n.º 24-1200 Lisboa
telef.: 675051 • telex: 16431 CT LISB
endereço telegráfico: CONTEL - Lisboa

NOTA CIENTÍFICA N.º 3

Media where the coincidence of the directions of phase and group velocity remain under a Lorentz Transformation

M. ABREU FARO
MARIA JOÃO MARQUES MARTINS
Universidade Técnica de Lisboa (I. S. T.)
Centro de Electrodinâmica (I. N. I. C.)

SUMMARY

If the dispersion relation is of the form $\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{k}} = C_0$ where C_0 is a relativistic invariant, the directions of the phase and group velocities are coincident and remain coincident under a Lorentz Transformation.

We prove in this paper the converse: Imposing the coincidence as a relativistic propriety, the dispersion equation is necessarily of the form $\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{k}} = C_0$.

SUMÁRIO

Se a equação de dispersão de um meio for da forma $\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{k}} = C_0$ em que C_0 é um invariante relativista, as direcções das velocidades de fase e de grupo são coincidentes e permanecem coincidentes sob uma Transformação de Lorentz.

Provámos o reciproco: Impondo a coincidência considerada como uma propriedade relativista a equação de dispersão é necessariamente da forma $\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{k}} = C_0$.

For a homogeneous isotropic medium, in the rest frame, the directions of the phase and group velocity are coincident.

Under a Lorentz transformation these directions are in general no longer coincident. This is well known.

Once in an isotropic collisionless plasma the dispersion equation is an invariant, the direction of the phase and group velocity remain coincident under the Lorentz transformation.

We may then put the question:

— What is the dispersion relation of media where we could eventually observe the same phenomena?

We introduce one single condition:

— If the directions of the phase and group velocity coincide in any frame, then they must remain coincident in any other inertial frame.

Manuscrito recebido para publicação em 18/6/80.

Let us consider the expressions of the phase and group velocity in the rest frame $\bar{S}(\bar{x}^i)$, moving with velocity v relative to $S(x^i)$:

$$\bar{\mathbf{V}}_f = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{k}}} \bar{\mathbf{k}} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{k}}} (\bar{k}_x \mathbf{e}_x + \bar{k}_y \mathbf{e}_y + \bar{k}_z \mathbf{e}_z) \qquad (1.a)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_g = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\mathbf{k}}} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_z} \mathbf{e}_z \qquad (1.b)$$

If $\bar{\mathbf{V}}_f$ and $\bar{\mathbf{V}}_g$ are paralell, then we have

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_x} \frac{1}{\bar{k}_x} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_y} \frac{1}{\bar{k}_y} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_z} \frac{1}{\bar{k}_z} \qquad (2)$$

Transforming these quantities to frame $S(x^i)$ and imposing the coincidence of the directions of phase and group velocity, we have

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} \frac{1}{k_x} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \frac{1}{k_y} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \frac{1}{k_z} \qquad (3)$$

It is well known that the group velocity is transformed in the same way as the velocity of a material particle, so

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_x} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial k_x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial k_x}}$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{\partial \omega}{\partial k_y}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial k_x}} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_z} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{\partial \omega}{\partial k_z}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial k_x}}$$

Once $[\mathbf{k}, \omega/c]$ is a four-vector, we also have

$$\bar{k}_x = \gamma \left[k_x - \frac{v}{c^2} \omega \right] \qquad \bar{k}_y = k_y \quad \bar{k}_z = k_z \qquad (5)$$

Inserting (4) and (5) in (2) we obtain, once we always have $\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial k_x}\right) \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial \omega}{\partial k_x} - v}{k_x - \frac{v}{c^2} \omega} = \frac{1}{k_y} \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = \frac{1}{k_z} \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \qquad (6)$$

We immediatly verify that the second equality of (3) is a consequence of the second equality of (2).

From the first equality of (3) we obtain

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} - v = \left(k_x - \frac{v}{c^2}\omega \right) \frac{1}{k_x} \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \qquad (7)$$

which leads to

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} \frac{1}{k_x} = \frac{c^2}{\omega} \qquad (8.a)$$

According to (3)

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_y} \frac{1}{k_y} = \frac{c^2}{\omega} \qquad (8.b)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_z} \frac{1}{k_z} = \frac{c^2}{\omega} \qquad (8.c)$$

If we take the scalar product of the phase and group velocity we have

$$\mathbf{V}_g . \mathbf{V}_f = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \frac{\omega}{\mathbf{k}.\mathbf{k}} k_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \frac{\omega}{\mathbf{k}.\mathbf{k}} k_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \frac{\omega}{\mathbf{k}.\mathbf{k}} k_z \qquad (9.a)$$

Taking 8.a) b) c) into account we have

$$\mathbf{V}_g . \mathbf{V}_f = c^2 \qquad (9.b)$$

Since we have considered that the directions of phase and group velocity are the same, we conclude

$$V_f V_g = c^2 \qquad (10)$$

According to the Principle of Relativity it is obvious that from (3) we would also conclude

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_x} \frac{1}{\bar{k}_x} = \frac{c^2}{\omega} \qquad (11.a)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_y} \frac{1}{\bar{k}_y} = \frac{c^2}{\omega} \qquad (11.b)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{k}_z} \frac{1}{\bar{k}_z} = \frac{c^2}{\omega} \qquad (11.c)$$

hence

$$\bar{V}_f \bar{V}_g = c^2$$

The differential system (11) is easily integrated, giving

$$\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - (\bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2 + \bar{k}_z^2) = C_o = \text{const.}^e \qquad (12)$$

This is the dispersion equation of isotropic media which satisfy the properties we have postulated.

This relation is observed, as we have previously stated, in an isotropic collisionless plasma where

$$\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \bar{\mathbf{k}} . \bar{\mathbf{k}} = \frac{\bar{\omega}_p^2}{c^2} = C_o \qquad (13)$$

and $\bar{\omega}_p = \sqrt{\bar{N}_e e^2 / \varepsilon_o \bar{m}_e}$ is the plasma frequency.

The first member of (13) is a relativistic invariant and therefore $\bar{\omega}_p$ must be a relativistic invariant as well.

As a matter of fact, from the transformation of the electronic density $\bar{N}_e$ and the mass $\bar{m}_e$ we can easily conclude that $\bar{\omega}_p$ is an invariant.

Obviously, equation (12) is also verified when the medium considered is the vacuum, where $C_o = 0$ and (12) is then given by

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \bar{\mathbf{k}} . \bar{\mathbf{k}} = 0$$

Equation (13) is also verified by the formalism introduced by De Broglie in Wave Mechanics, where

$$\text{Moment} \rightarrow \mathbf{p} = \frac{h}{2\pi} \bar{\mathbf{k}}$$

$$\text{Energy} \rightarrow E = \frac{h}{2\pi} \bar{\omega}$$

$\left[\mathbf{p} , \frac{E}{c} \right]$ is a four-vector and so

$$\frac{\bar{E}^2}{c^2} - \bar{\mathbf{p}} . \bar{\mathbf{p}} = \frac{E_o^2}{c^2} = m_o^2 c^2$$

and then we obtain once again the dispersion relation (12)

$$\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \bar{\mathbf{k}} . \bar{\mathbf{k}} = \frac{4\pi^2}{h^2} m_o^2 c^2 = C_o$$

CONCLUSION

If the dispersion equation of a homogeneous isotropic medium is

$$\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \bar{\mathbf{k}} . \bar{\mathbf{k}} = \text{relativistic invariant}$$

then the directions of the phase and group velocity are coincident under a Lorentz transformation.

The purpose of this paper is to demonstrate the converse:

If these directions remain coincident, we necessarily have for the dispersion equation

$$\frac{\bar{\omega}^2}{c_2} - \bar{\mathbf{k}} . \bar{\mathbf{k}} = C_o$$

where C_o is a relativistic invariant, and we always have

$$\bar{V}_f \bar{V}_g = V_f V_g = c^2$$

It is interesting, we believe, to appliy these results to a waveguide but this can be developed later on.

NOTA CIENTÍFICA N.º 4

Determination rapide du courant absorbé par un moteur asynchrone alimenté par onduleur de tension

F. LABRIQUE
J. M. THIRY
Université Catholique de Louvain

ABSTRACT

In this short paper, it is shown that the current drawn by an asynchronous motor from a voltage inverter power supply can be easily and quickly predicted without resorting to a harmonic analysis of the inverter output voltage.

RESUMO

A presente nota mostra que a corrente absorvida por um motor assíncrono alimentado por um ondulador de tensão pode ser determinada de maneira simples e rápida, sem recorrer à análise harmónica da tensão de saida do ondulador.

1 — INTRODUCTION

Le calcul du courant absorvé en régime permanent par un moteur asynchrone triphasé alimenté par un onduleur de tension s'effectue habituellement en décomposant en série de Fourier la tension de sortie de l'onduleur et en appliquant chaque composante au circuit équivalent de la machine correspondant à l'harmonique considérée **[1]**, **[2]**. En suivant cette procédure, on introduit généralement une simplification qui consiste à réduire, pour toutes les harmoniques, le schéma équivalent de la machine à sa self de fuites.

Toutefois, lorsque cette simplification est utilisée, il est inutile de recourir à un calcul, composante par composante, pour déterminer le courant harmonique. En effet, dans ce cas, on peut calculer directement le courant harmonique total à partir de la seule connaissance de la tension de sortie de l'onduleur et de sa composante fondamentale. On aboutit ainsi à une méthode de calcul plus simple et rapide, qui est développée dans la présente note, en considérant à titre d'exemple le cas d'une alimentation par un onduleur à ondes rectangulaires dont la tension côté continu a une amplitude proportionnelle à la fréquence de sortie de manière à maintenir constant le flux dans le moteur (fig. 1) **[3]**.

Manuscrito recebido para publicação em 1/7/80.

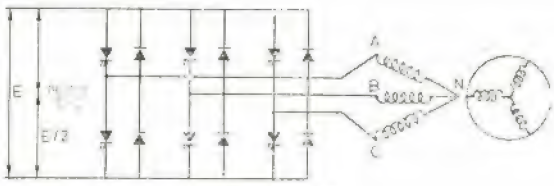


Figure 1a

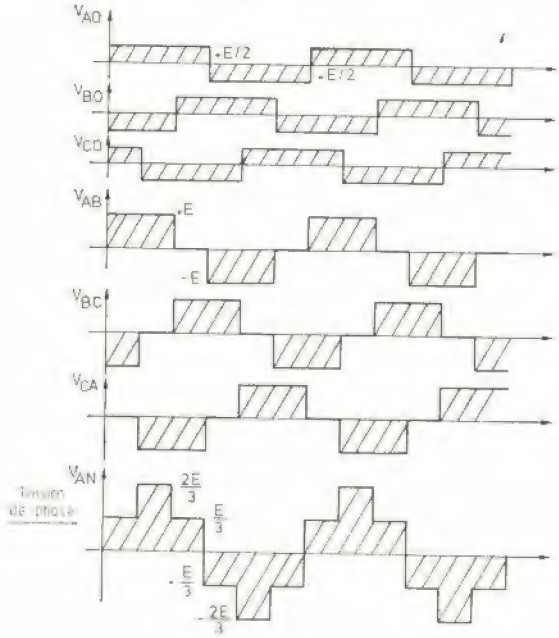


Figure 1b

Des essais effectués sur une machine de laboratoire montrent la bonne concordance existant entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux.

2 — CALCUL DE LA COMPOSANTE HARMONIQUE TOTALE DU COURANT

La tension de phase d'alimentation, fournie par l'onduleur, est une fonction en échelons dont la forme est donnée à la figure 1b pour l'onduleur à ondes rectangulaires pris comme exemple.

On prend comme schéma équivalent d'une phase de la machine, le circuit représenté à la figure 2 **[4]**.

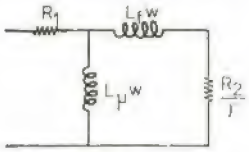


Figure 2

Les composantes harmoniques présentes dans la tension d'alimentation sont de rang $k = 6j \pm 1$, ($j \in \{1, 2, 3...\}$)

et le glissement du rotor par rapport aux harmoniques est donné par l'expression (1)

$$\gamma_{6j\pm1} = \frac{(6j \pm 1)\,\omega_f \pm \omega_r}{(6j \pm 1)\,\omega_f} \simeq \frac{6j}{6j \pm 1} \simeq 1 \qquad (1)$$

Dans cette expression, ω_f représente la pulsation de la fondamentale et ω_r la vitesse angulaire de rotation du rotor qui, en fonctionnement normal, est sensiblement égale à ω_f.

Comme le glissement du rotor par rapport aux harmoniques est pratiquement égal à 1, on peut, sauf aux très basses fréquences d'alimentation où les chutes de tension sur les résistances R_1 et R_2 ne peuvent plus être négligées, réduire le schéma équivalent, pour les harmoniques, à l'inductance totale de fuites, L_f (figure 3).

Fig. 3

Dès lors, la composante harmonique totale du courant d'alimentation s'obtient de manière immédiate en faisant la différence entre la réponse en régime de l'inductance totale de fuites L_f à la tension de phase de l'onduleur, soit I'_t, et sa réponse en régime à la composante fondamentale de cette tension, soit I'_f. La composante fondamentale de la tension est donnée par l'expression (2)

$$V_f = \frac{2E}{\pi} \sin \omega t \qquad (2)$$

Comme la réponse en courant d'une inductance à une onde de tension s'obtient par simple intégration, les résultats de la figure 4 sont évidents en n'appellent aucun commentaire.

La position et l'amplitude des ***pointes*** de courant harmonique sont reprises au tableau 1.

COURANT HARMONIQUE TOTAL	
Position	Valeur absolue des extrémés
$0, \pi, 2\pi, \ldots$	$\frac{2E}{\omega L_f}\left(\frac{\pi}{9} - \frac{1}{\pi}\right)$
$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \ldots$	$\frac{2E}{\omega L_f}\left(\frac{\pi}{18} - \frac{1}{2\pi}\right)$
$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \ldots$	$\frac{2E}{\omega L_f}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)$

Tableau 1

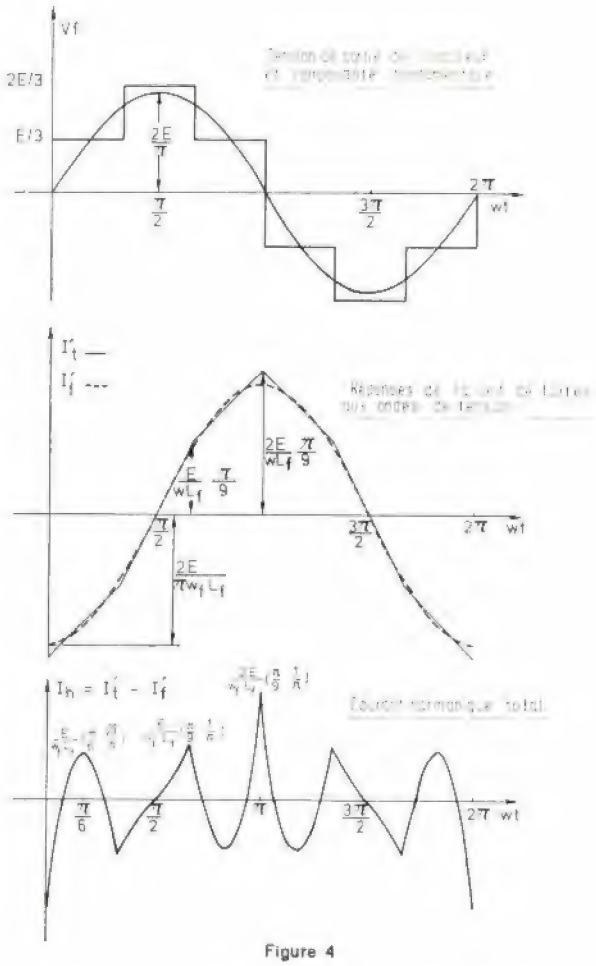


Figure 4

3 — CALCUL DU COURANT TOTAL ABSORBE PAR LE MOTEUR

Le courant de phase total absorbé par la machine s'obtient en ajoutant au courant harmonique total, le courant fondamental absorbé soit I_f. Ce courant se calcule à partir du schéma équivalent de la machine pour la composante fondamentale (figure 5).

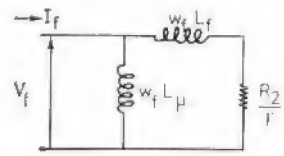


Figure 5

Le courant fondamental peut se décomposer en ses composantes active et réactive (I_A et I_R)

$$I_A = I_f \cos \phi = \frac{V.\,R_2/\gamma}{\left(R_2/\gamma\right)^2 + \omega_f^2 L_f^2}$$

$$I_R = I_f \sin \phi = \frac{V}{\omega_f L_\mu} + \frac{V\,\omega_f L_f}{\left(R_2/\gamma\right)^2 + \omega_f^2 L_f^2}$$

Le courant total absorbé par le moteur est représenté à la figure 6.

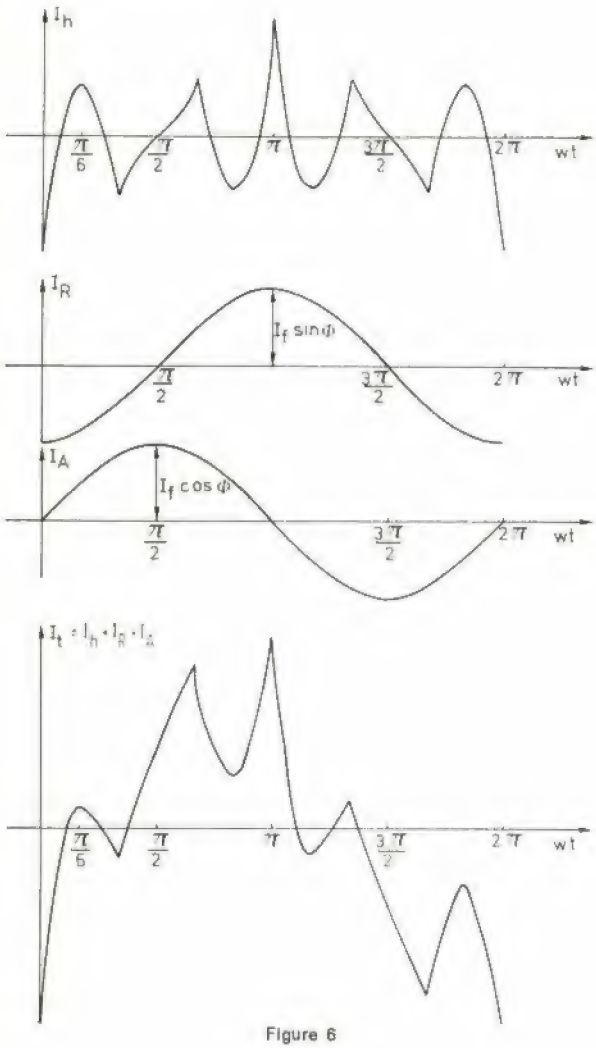


Figure 6

Les pics de courant principaux sont localisés en $\omega t = k\pi$ et $\omega t = 2\pi/3 + k\pi$. Si on admet, en première approximation, que la composante réactive du courant reste, pour tous les régimes de fonctionnement, pratiquement égale au courant magnétisant $I_{\mu f}$, les pointes de courant, exprimées en valeur de crête, peuvent s'écrire en fonction des grandeurs nominales de la machine I_N et cos ϕ_N et du rapport $\omega_f L\mu/\omega_f L_f$, comme valant:

à vide

$$\left| I(k\pi) \right| = \left(1 + 0.096 \frac{\omega_f L_\mu}{\omega_f L_f} \right) \sqrt{2}\, I_N \sin \phi_N$$

$$\left| I\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right) \right| = \left(0{,}5 + 0{,}048 \frac{\omega_f L_\mu}{\omega_f L_f} \right) \sqrt{2}\, I_N \sin \phi_N$$

à la charge nominale

$$\left| I(k\pi) \right| = \left(1 + 0.096 \frac{\omega_f L_\mu}{\omega_f L_f} \right) \sqrt{2}\, I_N \sin \phi_N$$

$$\left| I\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right) \right| =$$

$$= \left(0{,}5 + 0{,}048 \frac{\omega_f L_\mu}{\omega_f L_f} \right) \sqrt{2}\, I_N \sin \phi_N + \frac{\sqrt{6}}{2} I_N \cos \phi_N$$

4 — VERIFICATION EXPERIMENTALE

Les essais ont été réalisés sur un moteur asynchrone à rotor bobiné d'une puissance de 7,5 kW dont les paramètres à la fréquence d'alimentation utilisée sont:

$$\omega_f L_\mu = 21.42\,\Omega$$

$$\omega_f L_f = 1.56\,\Omega$$

$$R_2 = 0.91\,\Omega$$

L'onduleur fonctionnait avec une tension E de 114,8 V correspondant à une fréquence d'utilisation de 23,8 Hz.

Les ondes de courant relatives à 2 régimes différents de la machine ont été relevées. Elles correspondent à des glissements de 0,85 % et 12,4 %.

Les figures 7 et 8 présentent les courbes relevées expérimentalement ainsi que les valeurs déterminées par calcul et montrent la très bonne concordance existant entre la théorie et l'expérience.

5 — CONCLUSION

On a présenté une méthode de calcul simple et rapide du courant absorbé par un moteur asynchrone alimenté par un onduleur de tension à ondes rectangulaires.

Cette méthode, dont la précision a été vérifiée expérimentalement, peut s'étendre sans difficulté aux cas d'une alimentation par un onduleur à modulation de largeur d'impulsion pour lequel le recours à la série de Fourier serait encore plus compliquée que dans le cas de l'onduleur à ondes rectangulaires qui a été considéré dans la présente note.

REFERENCES

[1] **A. Wiart** — *Association d'onduleurs et de machines synchrones.* Revue Générale d'Electricité, volume 84, n.º 11.

[2] **R. G. Hoft** and **J. B. Casteel** — *Power electronic circuit analysis techniques Control in Power Electronics and Electrical Drives,* IFAC 1977.

[3] **R. D. Adams** and **R. S. Fox** — *Several modulation techniques for a pulsewidth modulated inverter.* IEEE IA vol. 8, n.º 5, sept-oct. 1972.

[4] **F. Cahen** — *Machines tournantes à courants alternatifs.* Electrotechnique, Tome 4. Gauthier-Villars, Paris.

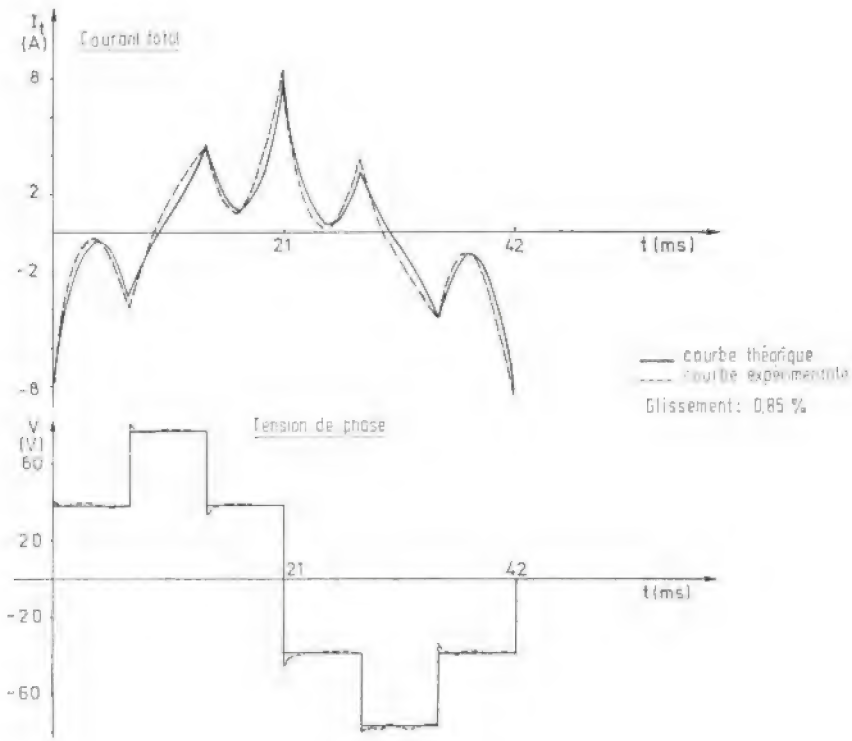


Figure 7

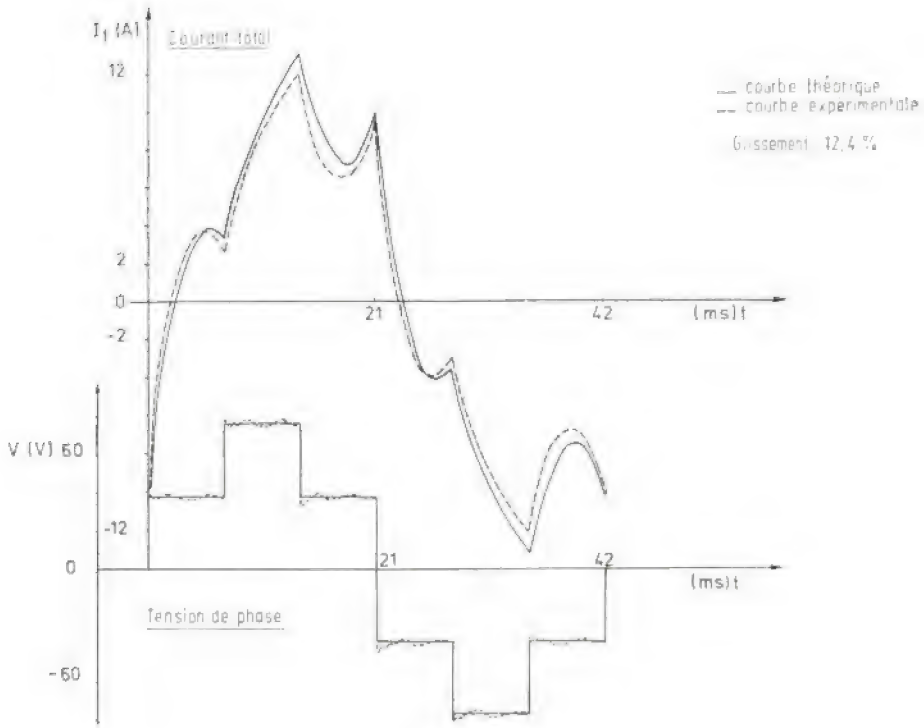


Figure 8

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 459

Ano LV — Junho 1980

FRANCISCO CARVALHAL, ISABEL LOURTIE e PEDRO LOURTIE — *Projecto apoiado em computador de sistemas de controlo*, «Técnica», Lisboa, LIV (459) Junho 1980, p. 355-368.

O artigo descreve com algum detalhe o bloco operacional de um conjunto articulado de programas para o projecto apoiado em computador de sistemas de controlo. Neste bloco encontram-se implementados os métodos do lugar geométrico das raízes, Nyquist, Bode e da simulação digital da resposta no tempo. Apresenta-se os algoritmos utilizados bem como alguns exemplos de aplicação.

MARIA CELESTE ANTUNES e SILVESTRE DIAS ANTUNES — *Tecnologia da metanogénese (revisão descritiva)*, «Técnica», Lisboa, LIV (459) Junho 1980, p. 369-382.

Neste artigo caracterizam-se as variáveis actualmente consideradas como fundamentais no processo metanogenético, descrevem-se as diferentes arquitecturas mais correntes nos digestores rurais, industriais e laboratoriais, sem que se faça qualquer análise quantitativa das relações matéria-prima — produtos. No entanto procura-se tanto quanto possível apresentar uma bibliografia exaustiva do estado actual da tecnologia da metanogénese.

SILVESTRE DIAS ANTUNES e MICHEL J. INSTALLE — *Utilização do plano de fases no controlo da digestão anaeróbia (aplicação à metanogénese)*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 383-392.

Estuda-se neste artigo a utilização da análise no plano de fases no controlo da actividade biológica de digestores homogéneos, sem que se faça a lavagem da biomassa presente, ou se entre em «estado de choque».

F. CALDEIRA SARAIVA — *Financiamento por acções de preço flutuante*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 393-402.

O presente artigo é uma aplicação de técnicas de controlo à determinação da política óptima de financiamento para firmas cujas acções tem valores de mercado decrescentes com a taxa de endividamento. Por aplicação do Princípio de Pontryagin em tempo contínuo as políticas dinâmicas óptimas são obtidas como funções dos valores dos parâmetros, sendo os resultados finais discutidos.

J. R. CALDAS PINTO — *Simulador industrial de controlo de nível*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 403-408.

Para fins didáticos construiu-se em 1976/77, no Centro de Automática da Universidade Técnica de Lisboa (C. A. U. T. L.), um sistema para estudo do controlo de nível, utilizando sempre que possível componentes industriais. Na nota técnica anexa descreve-se sumariamente este sistema.

M. ABREU FARO e MARIA JOÃO MARQUES MARTINS — *Meios em que as direcções das velocidades de fase e de grupo coincidem e se mantêm coincidentes sob uma transformação de Lorentz*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 409-410.

Se a equação de dispersão de um meio for da forma $\frac{\omega^2}{c^2} - \bar{k} \cdot \bar{k} = C_0$ em que C_0 é um invariante relativista, as direcções das velocidades de fase e de grupo são coincidentes e permanecem coincidentes sob uma Transformação de Lorentz.

Provámos o recíproco: Impondo a coincidência considerada como uma propriedade relativista a equação de dispersão é necessariamente da forma $\frac{\omega^2}{c^2} - \bar{k} \cdot \bar{k} = C_0$.

F. LABRIQUE e J. M. THIRY — *Determinação rápida da corrente absorvida por um motor assíncrono alimentado por um ondulador de tensão*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 411-412.

A presente nota mostra que a corrente absorvida por um motor assíncrono alimentado por um ondulador de tensão pode ser determinada de maneira simples e rápida, sem recorrer à análise harmónica da tensão de saída do ondulador.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 459

LV — June 1980

J. R. CALDAS PINTO — *Industrial simulador for level control*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 403-408.

For didactical purposes, a level control system has been assembled at C. A. U. T. L., in 1976/77. Industrial components were preferably used. This technical paper presents a brief description of the system.

M. ABREU FARO e MARIA JOÃO MARQUES MARTINS — *Media where the coincidence of the directions of phase and group velocity remain under a Lorentz Transformation*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 409-410.

If the dispersion relation is of the form $\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \bar{k} \cdot \bar{k} = C_o$ where C_o is a relativistic invariant, the directions of the phase and group velocities are coincident and remain coincident under a Lorentz Transformation.

We prove in this paper the converse: Imposing the coincidence as a relativistic propriety, the dispersion equation is necessarily of the form $\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \bar{k} \cdot \bar{k} = C_o$.

F. LABRIQUE e J. M. THIRY — *Quick calculation of the current in an induction motor driven by a voltage inverter*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 411-412.

In this short paper, it is shown that the current drawn by an asynchronous motor from a voltage inverter power supply can be easily and quickly predicted without resorting to a harmonic analysis of the inverter output voltage.

FRANCISCO CARVALHAL, ISABEL LOURTIE e PEDRO LOURTIE — *Computer-aided control system design*, «Técnica», Lisboa, LIV (459) Junho 1980, p. 355-368.

The paper describes with some detail the operational block of a control systems computer-aided design package. The root locus, Nyquist. Bode and time response methods are implemented in this block. The algorithms are presented as well as some application examples.

MARIA CELESTE ANTUNES e SILVESTRE DIAS ANTUNES — *Anaerobic digestion technology (review)*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 369-382.

In this article, variables nowadays considered as fundamental in the anaerobic digestion process are characterized, and the different architectures of digesters used in rural, industrial and laboratory applications are described. Although, if quantitative analysis of the transformation: prime matter — products is not considered, an exhaustive bibliography on the present state of the anaerobic digestion technology has been tried.

SILVESTRE DIAS ANTUNES e MICHEL J. INSTALLE — *Anaerobic digestion control using the phase-plane analysis (with application to methanogenesis)*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 383-392.

Phase-plane analysis of homogeneous digester systems is used to give information on how to control the biological activity without washing out the reactor or reaching a «shock state».

F. CALDEIRA SARAIVA — *Corporation financing under falling share prices*, «Técnica», Lisboa, LIV (459), Junho 1980, p. 393-402.

The present paper is an application of control techniques to the determination of the optimal financial policy, for a firm whose shares' market value falls with increasing leverage. By the application of Pontryagin's principle in continuous time the optimal dynamic policies are derived as funtions of the values of the parameters and the results are discussed.

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . . . 600$00

TOPOGRAFIA GERAL

C. Xerez — 1.º vol. 3.ª edição — 1978 . . 460$00
C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . (*)

TABELAS TÉCNICAS

Vicente Ferreira e Brazão Farinha, 8.ª edição 1977 700$00

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL

A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . 580$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO

Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 (*)

NÚMEROS E VARIÁVEIS COMPLEXAS

A. H. Simões de Abreu, 1.ª edição — 1977 . 400$00

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS

A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 200$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS

G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 150$00

MANUAL DE ESTRUTURAS

Brazão Farinha — 1.º vol. 1.ª edição — 1976 750$00

2.º e 3.º Volumes . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO

(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . 550$00

HIDRÁULICA GERAL

1 — Fundamentos teóricos, 1.ª ed. — 1979 675$00
2 — Escoamentos Líquidos . . . . . (*)

A. Manzanares

PROPAGAÇÃO E RADIAÇÃO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

1 — Ondas e Meios Materiais, 1.ª ed. - 1979 560$00
2 — Radiação 1.ª ed. - 1980 . . . . . 560$00

M. de Abreu Faro

Monografia n.º 1

CAUDAL PARA DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS HIDRÁULICAS E AMORTECIMENTO DE CHEIAS EM ALBUFEIRAS

António Carvalho Quintela e António Betâmio de Almeida, 1.ª edição — 1975 . . . 10$00

Monografia n.º 2

ESCOAMENTO COM SUPERFÍCIE LIVRE EM CANAIS DE SECÇÃO CIRCULAR

António Betâmio de Almeida, 1.ª ed. — 1978 30$00

(*) LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À **técnica**

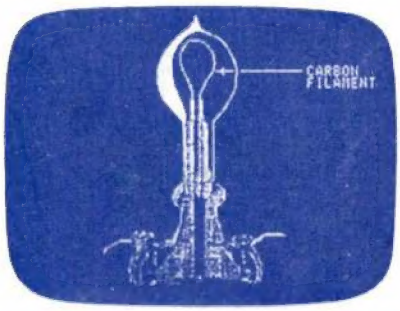
sorubal, s.a.r.l. and the Apple.

If you could talk to Thomas Edison, he'd tell you what it was like to turn the lights on in 1879. You could tell him about some bright ideas of the 20th century... particularly, a technological phenomenon that can handle everything from solar heat control to lighting your home via voice command. The Apple personal computer.

Expand your own inventiveness with the always-expandable Apple.

Take a look inside your local computer store. There's a range of Apple systems for you... whether you want expansion capabilities of four or eight accessory slots... or memory expandable to 64K bytes or 128K bytes. With this kind of flexibility, the possibilities for creating your own computer system are endless.

Want to add an A to D conversion board? Apple makes it happen. Want to plug into time sharing, news and electronic mail services? Apple does it all. Because Apple is the most popular personal computer with the least complicated interface, over 100 companies supply peripherals for the Apple family... including an IEEE 488 bus for instant control.



With Apple, Edison could've written a program to determine why some filaments burned longer than others.

Disk drives, a tool kit and creativity in color.

Apple was one of the first to use disk drives for increased performance and application versatility. Today, our 5¼" disk drive offers high density (143K bytes), high speed and low cost. No wonder this drive is the most popular on the market.

But now Apple goes one better with the DOS Tool Kit. A series of utility programs, it gives you the freedom to easily design 280h x 192v graphic displays in a palette of living color... depending on your choice of Apple system.

Edison was first with the movie camera and projector. Now, with Apple's DOS Tool Kit, you can be first to work wonders with colorful creative animation.

Edison had the first movie camera... and Apple has the DOS Tool Kit that takes you into the colorful world of animation.

Imagine the broadest line of software programs ever.

Apple's broad line of peripherals is equalled only by the most extensive line of software you'll find in the personal computing world. Since more than 170 companies offer software for the Apple family, you can have one of the most impressive program libraries ever.

When you write your own programs, your Apple speaks creatively in BASIC, Pascal, FORTRAN, PILOT and 6502 assembly language. Use these languages to score a sonata. Apple will play back your musical masterpiece on its built-in speaker.

Edison listened to his voice on a revolutionary phonograph in the 1800s... now you can listen to the sounds of today with Apple's inventive family of personal computers.

Where to find even more illuminating Apple experiences.

There's always something new being invented at Apple to set your imagination soaring. And there's always an expert to tell you all about it in detail. Your Apple dealer. If you already own an Apple, there's a whole future ahead to challenge man, mind and machine.

If you're considering a personal computer, stop by the computer store and compare. Apple's reliability, proven performance and recognized technological leadership will help you see the light. Don't let history pass you by.

Visit our sole distributor in Portugal, Sorubal S.A.R.L., Rua Gen. Pimenta de Castro 15 8.º, 1700 Lisboa, or call 89 65 55 (Lisbon) telex 12775 SORBAL P.

apple® computer